Appunti del corso di
Affidabilitá e Diagnostica dei Sistemi Elettrici

Andrea Cavallini, Gian Carlo Montanari
DIE-Universitá di Bologna
viale Risorgimento 2, 40136 Bologna
andrea.cavallini@mail.ing.unibo.it
http://limat.ing.unibo.it

A.A 1999/2000

Indice

Capitolo 1

Calcolo delle probabilitá

1.1 Esperimento aleatorio

Si definisce aleatorio un esperimento il cui risultato non é noto a priori. Esiste pertanto incertezza rispetto a quello che sará il risultato dell'esperimento. Un classico esempio di esperimento aleatorio é quello relativo al lancio di una moneta, o di un dado.

Esempio 1.1.1 La misura della tensione di scarica in un gas. Il fenomeno avviene quando la radiazione ionizzante fornisce il primo elettrone della valanga e la tensione ha raggiunto un livello sufficiente. Esiste quindi una notevole aletorietá dei risultati dovuta alla frequenza della radiazione (cioé la disponibilitá del primo elettrone), alla temperatura, all'umiditá.

La teoria delle probabilitá ha lo scopo di definire, matematicamente, cosa accade quando un esperimento aleatorio viene ripetuto un numero infinito di volte sotto la condizione che la ripetizione non alteri le condizioni dell'esperimento.

1.2 Eventi e spazi rappresentativi

Un esperimento aleatorio ammette vari risultati possibili. A questi risultati sono associati simboli detti eventi elementari. Si definisce evento un insieme di eventi elementari. Gli insiemi contenenti tutti gli eventi elementari sono detti spazi rappresentativi e saranno indicati nel seguito con la lettera S (dall'inglese *sample space*).

Esempio 1.2.1 T é la rappresentazione del risultato "testa" dell'esperimento aleatorio "lancio della moneta". C (croce) é una rappresentazione del risultato "croce" del medesimo esperimento. Sono entrambi eventi dell'esperimento, eventi elementari. L'insieme $S = \{T, C\}$ é un evento, detto "evento certo" in quanto esaurisce i possibili risultati dell'esperimento.

Esempio 1.2.2 I numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono possibili eventi elementari del risultato dell'esperimento "lancio del dado". L'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (sample space) esaurisce l'insieme dei risultati possibili. Anche P (numero pari) e D (numero dispari) sono possibili eventi. Si noti che P e D sono insiemi di eventi elementari. P puo' essere rappresentato come $\{2, 4, 6\}$, D come $\{1, 3, 5\}$.

Esempio 1.2.3 L'insieme

$$S = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$$

é lo spazio rappresentativo degli eventi relativi al lancio di una moneta ripetuto due volte.

Esempio 1.2.4 Nel lancio di un dado ripetuto tre volte lo spazio rappresentativo degli eventi é:

$$S = \{(i,j,k), i = 1,\dots,6, j = 1,\dots,6, k = 1,\dots,6\}$$

Tale spazio contiene tutti i possibili eventi elementari dell'esperimento "lancio del dado ripetuto tre volte".

La regola generale che risulta da questi esempi é che il numero di eventi elementari in un esperimento ripetuto é pari al numero di eventi elementari dell'esperimento elevato ad una potenza pari al numero di ripetizioni dell'esperimento. Questa regola puó essere, ad ulteriore esempio, applicata alla schedina del totocalcio, per la quale sono possibili $3^{13} = 1594323$ eventi (é un esperimento aleatorio con tre eventi elementari, $\{1\}$, $\{X\}$, $\{2\}$, ripetuto 13 volte).

NOTA

$R \leq 5$ Ohm é una rappresentazione del risultato dell'esperimento "misura della resistenza". L'insieme dei numeri reali positivi rappresenta tutti i possibili risultati dell'esperimento. Definire gli eventi ed il loro spazio rappresentativo su uno spazio continuo non é immediato. Si mostrerá nei prossimi capitoli come trattare questi casi.

1.3 Algebra degli eventi

Poiché gli eventi sono insiemi, l'algebra degli eventi coincide con l'algebra degli insiemi. Si richiamano qui alcune proprietá fra le piú utilizzate in pratica indicando con $\overline{\mathcal{E}}$ il complementare dell'evento $\mathcal{E}$, con $+$ l'unione di insiemi e con $\mathcal{E}\mathcal{F}$ l'intersezione degli insiemi $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$. Per esemplificare, si consideri S={1,2,3,4,5,6}, $\mathcal{E}$={1,2,3}, $\mathcal{F}$={3,5,6}.

$\overline{\mathcal{E}}$: non si verifica E $\rightarrow$\{4,5,6\}

$\overline{\mathcal{F}}$: non si verifica F $\rightarrow$\{1,2,4\}

$\mathcal{E}\mathcal{F}$: intersezione, si verificano entrambi gli eventi $\rightarrow$\{3\}

$\mathcal{E}+\mathcal{F}$: unione, si verifica almeno uno dei due eventi $\rightarrow$\{1,2,3,5,6\}

$\mathcal{E}-\mathcal{F}=\mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}$: si verifica $\mathcal{E}$ ma non si verifica $\mathcal{F}$ $\rightarrow$\{1,2\}

$\overline{\mathcal{E}}+\overline{\mathcal{F}}$: non si verificano entrambi gli eventi (cioé si verifica al piu' uno dei due $\rightarrow$\{1,2,4,5,6\}

$\mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}+\overline{\mathcal{E}}\mathcal{F}$: si verifica solo $\mathcal{E}$ o solo $\mathcal{F}$, ma non i due simultaneamente $\rightarrow$\{1,2,5,6\}

$\overline{\mathcal{E}}\,\overline{\mathcal{F}}$: non si verifica $\mathcal{E}$ e non si verifica $\mathcal{F}$ $\rightarrow$\{4\}

Valgono inoltre le leggi di de Morgan

- $\overline{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\ldots+\mathcal{E}_n}=\overline{\mathcal{E}}_1\overline{\mathcal{E}}_2\ldots\overline{\mathcal{E}}_n$
- $\overline{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\ldots\mathcal{E}_n}=\overline{\mathcal{E}}_1+\overline{\mathcal{E}}_2+\ldots+\overline{\mathcal{E}}_n$

Si fornisce inoltre un artificio per trasformare la somma di insiemi a intersezione nulla in una somma ad intersezione nulla:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2\ldots+\mathcal{E}_{n-1}+\mathcal{E}_n \quad = \quad & \\ & \mathcal{E}_1+ \\ & \overline{\mathcal{E}}_1\mathcal{E}_2+ \\ & \overline{\mathcal{E}}_1\overline{\mathcal{E}}_2\mathcal{E}_3+ \\ & \ldots \\ & \overline{\mathcal{E}}_1\overline{\mathcal{E}}_2\ldots\overline{\mathcal{E}}_{n-1}\mathcal{E}_n\end{aligned}$$

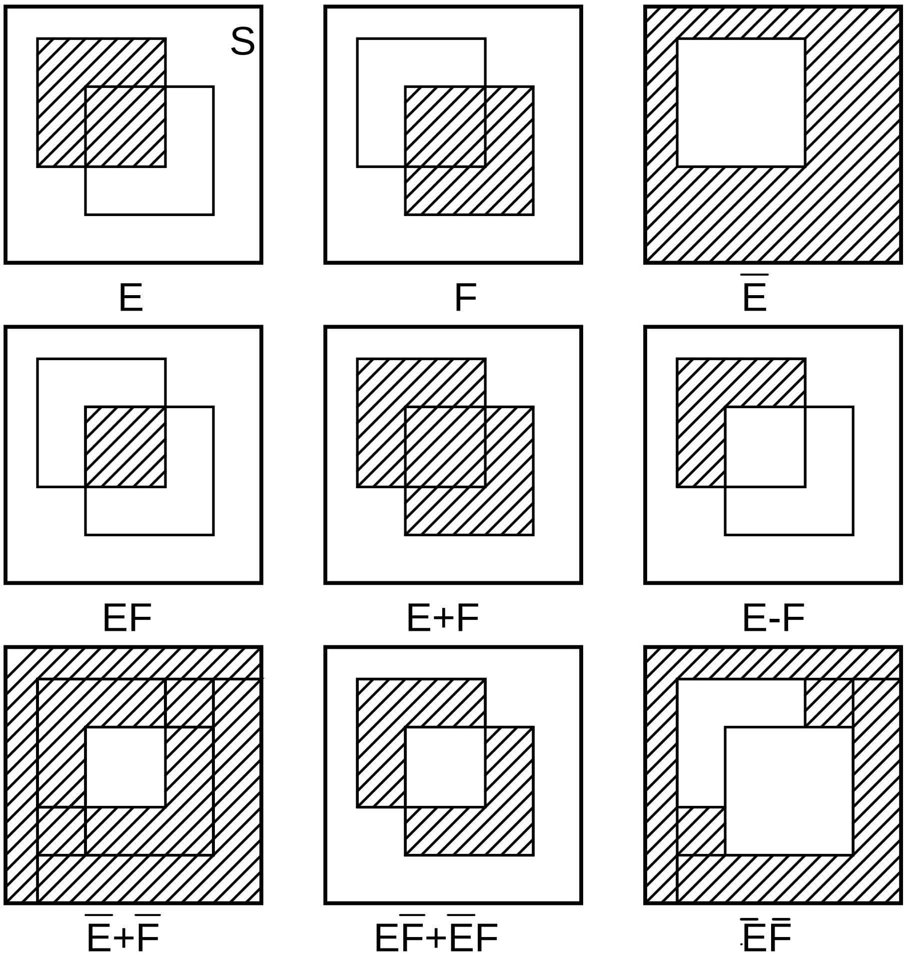


Figura 1.1: Rappresentazione grafica delle operazioni su insiemi.

1.4 Probabilitá

La probabilitá puó essere definita in un modo "filosofico", secondo quanto postulato da Bayes verso la fine del secolo XVIII. Supponiamo che vi si offra un importo di danaro pari a K. Tale importo é pagabile, peró, se e solo se si verifica un evento aleatorio $\mathcal{E}$. Quale é il prezzo, K_e, che ritenete equo (nel senso che non lede gli interessi di nessuna delle due parti) pagare per avere diritto ad incassare K se si verifica $\mathcal{E}$, oppure non incassare nulla se non si verifica $\mathcal{E}$?

Evidentemente, se $\mathcal{E}$ é certo $K_e = K$. Viceversa, se $\mathcal{E}$é impossibile, $K_e = 0$. E' possibile definire la probabilitá dell'evento $\mathcal{E}$come:

$$\Pr(\mathcal{E}) = K_e/K$$

La probabilitá é pertanto un numero compreso fra 0 e 1 che si associa all'evento $\mathcal{E}$. Indica, in pratica, quanto siamo disposti a scommettere (per ogni lira del premio) sull'evento $\mathcal{E}$.

Il modo classico, quantitativo, di definire la probabilitá é quello delle frequenze. Cioé, la probabilitá dell'evento $\mathcal{E}$, $Pr(\mathcal{E})$, é definita a partire dal numero di volte in cui si é verificato l'evento $\mathcal{E}$, $n(\mathcal{E})$, in n esperimenti ripetuti (in cui non sia cambiata la condizione del sistema) come il limite:

$$\Pr(\mathcal{E}) = \lim_{n\to\infty} n(\mathcal{E})/n$$

Ad esempio, se una moneta non é truccata é presumibile che nel 50% dei casi il risultato sia "testa". Quindi:

$$\Pr(T) = 0.5$$

In questo caso, dove nessuna informazione di tipo soggettivo é disponibile, i valori di probabilitá calcolati mediante l'approccio delle frequenze e da quello che utilizza il concetto di scommessa sono identici. Infatti, supponiamo che qualcuno ci offra una cifra K se si verifica (evento $\mathcal{E}$) "testa" nel lancio di una moneta. Quanto saremmo disposti a spendere per avere K? Ripetendo all'infinito l'esperimento il nostro guadagno sará:

$$G = \lim_{n\to\infty} (-nKe + n(\mathcal{E})K) = 0$$

per cui essendo $\lim_{n\to\infty} n(\mathcal{E})/n = 1/2$ il guadagno é al limite nullo quando $K_e = K/2$. Poiché il guadagno é, a meno del segno, pari alla perdita economica, $K_e = K/2$ corrisponde anche alla condizione di minimo rischio.

Infine, vale da un punto di vista pratico, l'approccio assiomatico, che permette di calcolare la probabilitá delle combinazioni di eventi. Tale approccio é una matematicizzazione dell'approccio delle frequenze. Infatti, l'approccio assiomatico definisce come frequenza di un evento $\mathcal{E}$ la funzione Pr() degli eventi tale che:

(1) $\Pr(\mathcal{E}) \geq 0$

(2) $\Pr(S) = 1$

(3) se $\mathcal{E}\mathcal{F} = \emptyset$ allora $Pr(\mathcal{E} + \mathcal{F}) = \Pr(\mathcal{E}) + \Pr(\mathcal{F})$ (spazi S di dimensione finita)

E' facile verificare che questi tre assiomi sono congruenti con la nozione di frequenza. Si pensi, ad esempio, al lancio di un dado S={1,2,3,4,5,6} con $\mathcal{E}$={1,2}, $\mathcal{F}$={5,6}. Quando lo spazio S non ha dimensione finita allora l'assioma (3) deve essere esteso come:

$$\text{se } \bigcap \mathcal{E}_i\mathcal{E}_j = \emptyset \forall\ i,j \text{ allora } \Pr(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(E_i)$$

dove il numero di insiemi considerato é infinito.

Per ultimo, é importante distingure fra la probabilitá a priori e quella a posteriori. La probabilitá a priori é la valutazione soggettiva della probabilitá di un evento. Ad esempio nel lancio di un dado é normale ritenere che ogni faccia del dado abbia la stessa probabilitá di manifestarsi delle altre. Durante il gioco, pero', si potrebbe scoprire che il nostro concorrente é un baro e che il dado che ha fornito per giocare mostra solo eccezionalmente la faccia corrispondente al numero 6, per esempio.

La probabilitá a posteriori é quella che deve essere stimata a partire da n esperimenti (che mi permette di stabilire se il concorrente bara).

Del calcolo delle probabilitá a posteriori si occupa la statistica. La teoria delle probabilitá tratta invece il calcolo della probabilitá di eventi costituiti da unioni, intersezioni etc di altri eventi a partire dalla conoscenza a priori delle probabilitá dei singoli eventi.

1.5 Alcune conseguenze degli assiomi (1)-(3)

1.5.1 Probabilitá di $\emptyset$

Poiché valgono simultaneamente

- $S + \emptyset = S$
- $S\emptyset = \emptyset$
- $\Pr(S) = 1$

allora si desume che:

$$\Pr(S) + \Pr(\emptyset) = 1 \rightarrow \Pr(\emptyset) = 0$$

1.5.2 Probabilitá di $\overline{\mathcal{E}}$

Poiché valgono simultaneamente

- $\mathcal{E} + \overline{\mathcal{E}} = S$
- $\mathcal{E}\overline{\mathcal{E}} = \emptyset$
- $\Pr(\emptyset) = 0$
- $\Pr(S) = 1$

allora si desume che:

$$\Pr(\overline{\mathcal{E}}) = 1 - \Pr(\mathcal{E})$$

1.5.3 Probabilitá di $\mathcal{E} - \mathcal{F} = \mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}$

Poiché

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}S = \mathcal{E}(\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}) = \mathcal{E}\mathcal{F} + \mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}$$

Poiché $\mathcal{E}\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}$ hanno intersezione nulla, é:

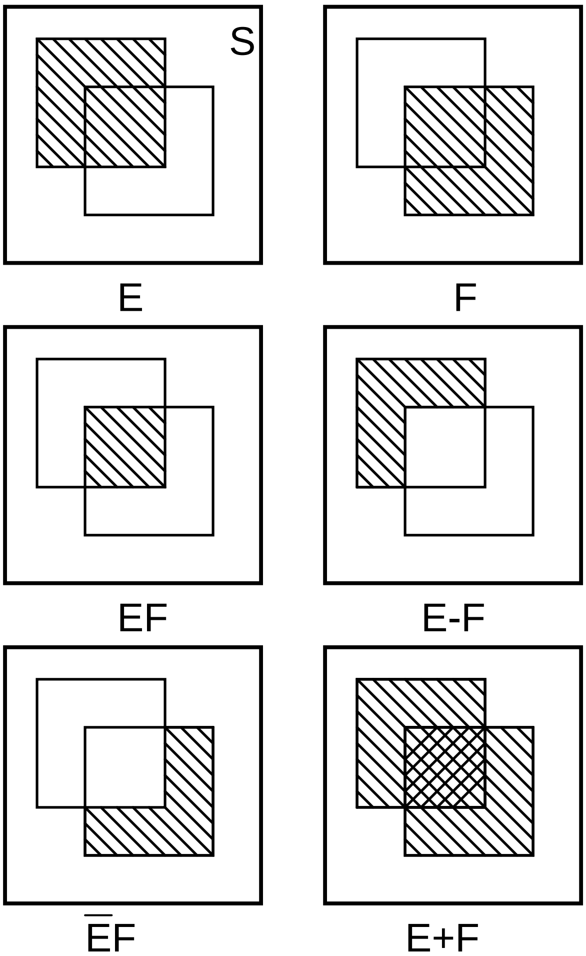


Figura 1.2: Rappresentazione grafica delle operazioni probabilistiche su insiemi. La probabilitá degli eventi mostrati é proporzionale alla somma delle aree tratteggiate contate una sola volta.

$$\Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E}\mathcal{F}) + \Pr(\mathcal{E}\overline{\mathcal{F}})$$

allora

$$\mathcal{E}\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{E} - \mathcal{E}\mathcal{F} \rightarrow Pr(\mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}) = \Pr(\mathcal{E} - \mathcal{F}) = Pr(\mathcal{E}) - Pr(\mathcal{E}\mathcal{F})$$

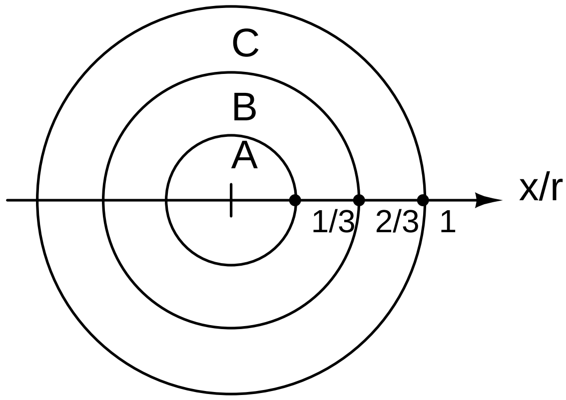
1.5.4 Probabilitá di $\mathcal{E} + \mathcal{F}$

Poiché non é detto che l'intersezione di $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sia vuota, calcoliamo $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ come somma di due insiemi la cui intersezione é vuota:

$$\mathcal{E} + \mathcal{F} = \mathcal{E} + (\mathcal{F} - \mathcal{E}) = \mathcal{E} + \overline{\mathcal{E}}\mathcal{F} = \mathcal{E} + \mathcal{F} - \mathcal{E}\mathcal{F}$$

Applicando quanto visto nel punto precedente determiniamo il risultato:

$$\Pr(\mathcal{E} + \mathcal{F}) = \Pr(\mathcal{E}) + \Pr(\mathcal{F}) - \Pr(\mathcal{E}\mathcal{F})$$



Esempio 1.5.1

Figura 1.3: Bersaglio discusso nell'esempio 1.5.1

Si noti dalle rappresentazioni delle operazioni su eventi riportate in figura 1.2 come la probabilitá sia una sorta di misura dell'area sottesa dagli eventi (questo appare evidentemente nel caso di $\mathcal{E} + \mathcal{F}$)

Un tiratore di freccette cerca di colpire, bendato, un bersaglio circolare diviso in tre settori, A, B e C, come illustrato in figura 1.3. Sia indicata, inoltre, con M la metá inferiore del bersaglio.
Supponendo che le freccette che non arrivano al bersaglio non abbiano interesse nei calcoli seguenti, determinare la probabilitá che una freccetta arrivi:

(a) nel settore A, $\Pr(A)$,

(b) nel settore B, $\Pr(B)$,

(c) nel settore C, $\Pr(C)$,

(d) nei settori A e C contemporaneamente, $\Pr(AC)$,

(e) nei settori A o C, $\Pr(A + C)$,

(f) nel settore C e nella metá inferiore del bersaglio contemporaneamente $\Pr(CM)$

(g) nei settori B o C, ma non nel settore A, $\Pr(\overline{A})$,

(h) nel settore C o nella metá inferiore del bersaglio, $\Pr(C + M)$.

L'ipotesi che la persona che tira le freccette sia bendata impone una indifferenza rispetto ai vari punti del bersaglio. In altre parole, la probabilitá che la freccetta arrivi in una certa regione sará proporzionale all'estensione della regione, non alla sua posizione (se il giocatore non fosse bendato sarebbe logico supporre che, a paritá di superficie, le regioni prossime al centro del bersaglio avrebbero alta probabilitá di essere centrate da una freccetta). Quindi:

$$\Pr(A) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(bersaglio)} = \frac{\pi r^2/9}{\pi r^2} = 1/9$$

$$\Pr(B) = \frac{\text{Area}(B)}{\text{Area}(bersaglio)} = \frac{\pi[(2/3r)^2 - (1/3r)^2]}{\pi r^2} = 4/9 - 1/9 = 3/9$$

$$\Pr(C) = \frac{\text{Area}(C)}{\text{Area}(bersaglio)} = \frac{\pi[r^2 - (2/3r)^2]}{\pi r^2} = 1 - (2/3)^2 = 5/9$$

Poiché l'aerea della regione comuni ai settori A e C é nulla, allora:

$$\Pr(AC) = 0$$

mentre, poiché l'area della regione data da A e C é la somma delle aree di A e C, é :

$$\Pr(A + C) = \Pr(A) + \Pr(C) = 1/9 + 5/9 = 2/3$$

Per (f), si osservi che é richiesto che la freccetta cada nella metá della superficie ricoperta dal settore C, quindi:

$$\Pr(CM) = \frac{\Pr(C)}{2} = 5/18$$

La domanda (g) puó essere risolta immediatamente in quanto:

$$\Pr(B+C) = \Pr(\overline{A}) = \frac{\text{Area}(B) + \text{Area}(C)}{\text{Area}(bersaglio)} = \frac{\text{Area}(bersaglio) - \text{Area}(A)}{\text{Area}(bersaglio)} = 1 - \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(bersaglio)} = 1 - \Pr(A) = 8/9$$

In (h) si deve tenere conto del fatto che utilizzare la somma delle probabilitá $\Pr(C)$ e $\Pr(M) = 0.5$ comporterebbe un errore. Infatti, la metá inferiore del settore C verrebbe computata due volte. La probabilitá calcolata in questo modo eccederebbe, pertanto, quella vere di $\Pr(C)/2$. Quindi:

$$Pr(C + M) = Pr(C) + Pr(M) - Pr(CM) = 5/9 + 1/2 - 5/18 = 1/2 + 5/18$$

1.6 Combinazioni di eventi equiprobabili: il campionamento

Nella teoria delle probabilitá ha spesso interesse valutare la probabilitá di eventi costituiti da eventi elementari equiprobabili quando si eseguano esperimenti ripetuti. Questo tipo di valutazione ha grande interesse sia dal punto di vista teorico, come sará mostrato piú avanti, sia dal punto di vista pratico. Ad esempio, i concetti esposti in seguito trovano applicazione immediata nei problemi di controllo di qualitá delle produzioni industriali.

L'ipotesi di equiprobabilitá degli eventi elementari consente di determinare la probabilitá p di ciascuno di essi. Infatti, gli eventi elementari hanno intersezione nulla e unione uguale all'evento certo. La probabilitá dell'unione di eventi elementari é pertanto la somma delle probabilitá degli eventi elementari stessi ed é uguale ad 1 : $\sum_i \mathcal{E}_i = 1$. Quindi, se N é il numero di eventi elementari equiprobabili, allora:

$$p = 1/N$$

Nel caso di lancio di una moneta $p = \Pr(T) = \Pr(C) = 1/2$ mentre nel caso di lancio di un dado $p = 1/6$.

Il problema di n esperimenti ripetuti si formalizza in modo analogo. Sia S é lo spazio degli eventi elementari del singolo esperimento, S^n lo spazio degli eventi elementari dell'esperimento ripetuto n volte. Sotto l'ipotesi di equiprobabilitá degli eventi allora ogni evento elementare relativo all'esperimento ripetuto avrá probabilitá:

$$p_n = 1/N(S^n)$$

dove $N(S^n)$ il numero di eventi elementari in S^n.

Il primo problema che si deve risolvere é pertanto il calcolo di $N(S^n)$. Esistono due modi di ripetere n volte un esperimento. Il primo tipo di esperimento é detto *con reintroduzione*, il secondo *senza reintroduzione*. Le modalitá di campionamento possono essere descritte senza ledere la generalitá della trattazione riferendosi all'esperimento di estrazione di palle numerate da un'urna. Nel campionamento con reintroduzione una palla puó essere estratta piú volte in quanto ogni volta viene reintrodotta nell'urna. Nel campionamento senza reintroduzione la palla estratta non viene reintrodotta nell'urna e non puó essere estratta nuovamente.

Ad esempio, per 2 estrazioni da un'urna contenente 3 palle, i risultati possibili per il campionamento con reintroduzione sono:

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{array}$$

mentre nel caso senza reintroduzione:

$$\begin{array}{cc} (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) \end{array}$$

Nel primo caso sono possibili 9 risultati, nel secondo 6. E' facile generalizzare in entrambi i casi. Infatti, nel campionamento con reintroduzione, alla prima estrazione é possibile selezionare N palle. Ad ognuna di queste palle é possibile associarne altre N dalla seconda estrazione, per un totale di N^2 esperimenti elementari relativi all'esperimento ripetuto due volte. Ad ognuno di questi eventi é possibile associare una delle N palle provenienti dalla terza estrazione, arrivando ad N^3 eventi elementari, ecc.. Quindi se un esperimento di estrazione di N palle viene effettuato n volte con reintroduzione, allora i possibili eventi elementari sono:

$$N(S^n) = N^n \text{ (con reintroduzione)} \tag{1.1}$$

Se, invece, si effettua l'esperimento senza reintroduzione, allora alla prima selezione sono disponibili N palle, alla seconda $N-1$, alla terza $N-2$, etc. Quindi, se $n \leq N$, gli eventi elementari sono:

$$N(S^n) = (N)_n = N(N-1)(N-2)\ldots(N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!} \text{ (senza reintroduzione)} \tag{1.2}$$

Queste relazioni possono essere utilizzate immediatamente a scopi probabilistici. Se si volesse calcolare, ad esempio, la probabilitá della sequenza TT nel lancio ripetuto due volte di una moneta (campionamento con reintroduzione) bisognerebbe procedere nel modo seguente. Per cominciare si stabilisce che $N = 2$, infatti 2 é il numero di eventi elementari in ogni esperimento singolo. Quindi, il numero di possibili rappresentazioni del risultato dell'esperimento multiplo é $N^2 = 2^2 = 4$ (infatti i risultati possono essere TT, TC, CT o CC). Assumendo che tutte le rappresentazioni siano equiprobabili deriva che la probabilitá di TT (o di qualunque altra sequenza) é $p = 1/N = 1/4 = 0.25$. Si osservi come al ripetersi degli esperimenti gli eventi elementari hanno via via minore probabilitá. Infatti, supponendo che si intenda lanciare 10 volte una moneta, ciascuna delle 2^{10} possibili sequenze di risultati, ugualmente probabili, ha probabilitá $1/2^{10} \approx 1/1000$. Quindi la probabilitá di ottenere un particolare simbolo da uno spazio S di N simboli é N^{-1}, mentre la probabilitá di ottenere una certa sequenza di simboli in n esperimenti é N^{-n}. Se si desiderasse una particolare sequenza da un lancio di dadi ripetuto 10 volte, allora la probabilitá effettiva di realizzare questa sequenza sarebbe $1/6^{10} \approx 1.6510^{-8}$.

A questo punto é utile richiamare il procedimento logico che permette di determinare il numero di sottoinsiemi di k palle numerate, x_k, estraibili senza reintroduzione da un'urna contenente N palle distinte. Per sottoinsiemi intendiamo insiemi di oggetti non distinguibili in base all'ordine, quindi $\{1,2\}$ e $\{2,1\}$ sono lo stesso sottoinsieme.

Per quanto mostrato sopra, si evince che nell'estrarre k palle dall'urna é possibile ricavare

$$k(k-1)(k-2)\ldots 2\ 1 = k!$$

sequenze distinte in base all'ordine di presentazione (basta pensare di estrarre k palle, riporle in un'altra urna ed effettuare tutte le possibili estrazioni senza reintroduzione). Se si selezionano altri k elementi é

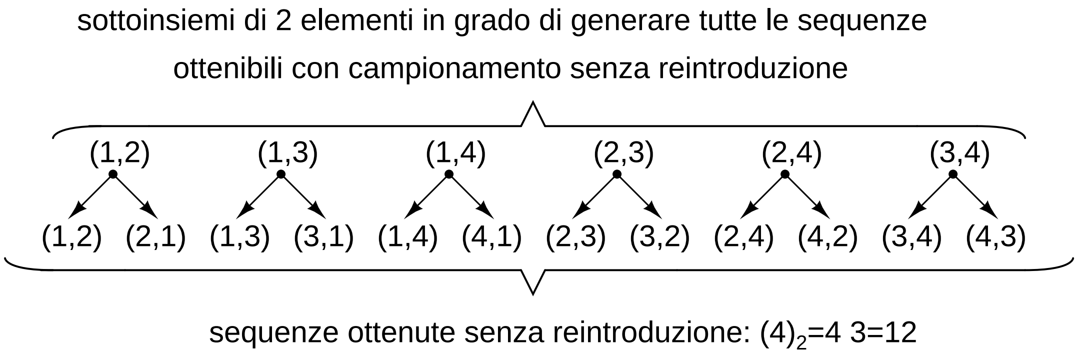


Figura 1.4: Numero di sottoinsiemi e di sequenze di ordine 2 ottenibili da un'urna contenente 4 palle numerate.

possibile realizzare altre $k!$ sequenze distinte. La somma $k!+k!+k!+\ldots k!$ ripetuta x_k volte coincide con tutte le $(N)_k$ possibili sequenze (ottenute senza reintroduzione e distinte in base all'ordine di presentazione di k elementi estratti dall'urna. Si veda, ad esempio, la figura 1.4 che mostra il numero di sottoinsiemi di ordine 2 ed il numero di sequenze di lunghezza 2 ottenute nell'estrazione di palle da un un'urna contenente 4 palle numerate. Poiché tutti gli x_k sottoinsiemi forniscono $k!$ sequenze, allora:

$$x_k k! = \frac{N!}{(N-k)!} \rightarrow x_k = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

Il numero x_k viene comunemente indicato come coefficiente binomiale:

$$x_k = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

Il coefficiente binomiale gode della proprietá che, assegnati due numeri a e b é:

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) a^{(N-k)} b^k \tag{1.3}$$

Esempio 1.6.1 I sottoinsiemi di 2 elementi estraibili da un'urna contenente 4 palle sono:

$$\{((1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

cioé 6 sottoinsiemi. Il risultato é corretto, infatti si verifica immediatamente che:

$$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4321}{22} = 6$$

Esempio 1.6.2 Calcolare i sottoinsiemi con 3 teste nel lancio di 5 monete.

Per arrivare al risultato, si deve considerare il fatto che l'esperimento singolo (cioé il lancio di una moneta) ha due soli eventi elementari (testa o croce). Dunque, assegnare gli esperimenti in cui si verifica testa corrisponde ad assegnare l'intera sequenza. Se, ad esempio, si verifica testa negli esperimenti 1 e 4, la sequenza ottenuta é $TCCTC$. Quindi, il numero di sequenze contenenti tre teste coincide con il numero di sottoinsiemi contenenti tre numeri estratti (senza reintroduzione) dall'insieme $\{1,2,3,4,5\}$. A questo punto il risultato puó essere calcolato:

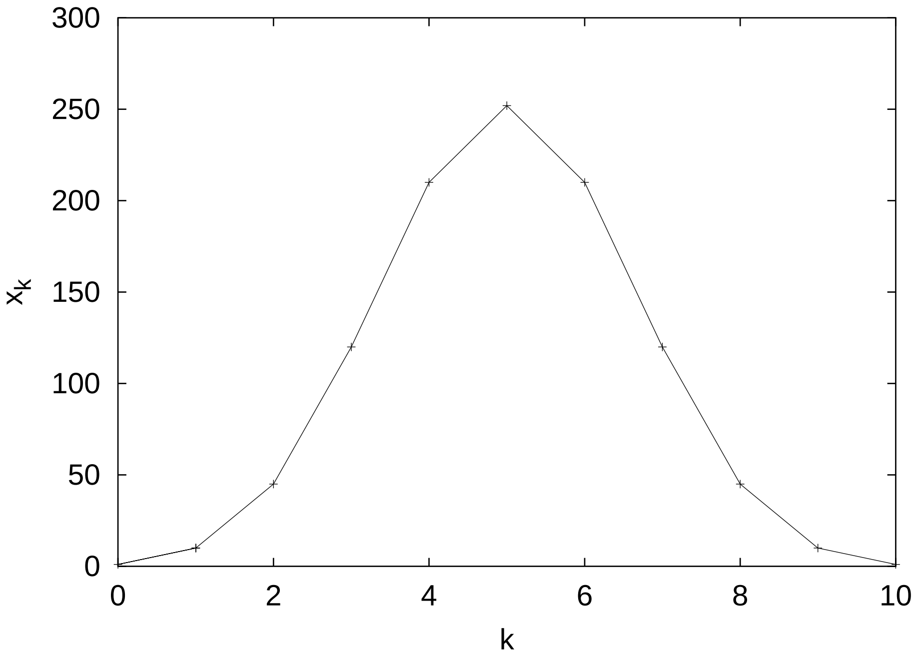


Figura 1.5: Andamento del coefficiente binomiale per N=10 ottenuto al variare di k
.

$$\binom{5}{3} = 5!/(3!2!) = 10$$

Si ricorda che il coefficiente binomiale é, per definizione, simmetrico e che presenta un massimo in corrispondenza a $k = N/2$. La figura 1.5 mostra l'andamento del coefficiente binomiale per $N = 10$. Si noti come la figura tende ad avere l'aspetto di una campana.

Un applicazione del coefficiente binomiale é il calcolo del numero totale dei sottoinsiemi di un insieme S avente N elementi. Applicando (1.3) con $a = b = 1$, si ottiene:

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \ldots + \binom{N}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$$

cioé la sommatoria del numero di sottoinsiemi di ordine k estesa da $k = 0$ (includente soltanto $\emptyset$) a $k = N$ (includente solanto S stesso). Tale numero coincide con il numero totale di sottoinsiemi, di qualunque ordine, estraibili da un insieme di N elementi.

Esempio 1.6.3 Gli eventi sono dunque sottoinsiemi di S e sono composti da uno o piú eventi elementari. Si consideri l'estrazione da una urna di 3 palle marcate con i numeri 1, 2, e 3,. Gli eventi elementari sono $\{1\}$, $\{2\}$ $\{3\}$. Se l'ordine di estrazione non é importante, allora gli eventi possibili (combinazioni di eventi elementari) sono:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

essendo $\emptyset$ l'evento per cui non si estrae nessuna delle tre palline. Tale evento é detto impossibile. L'evento $\{1,2,3\}$, coincidente con S é detto evento certo. Il numero di eventi é 2^N (8 in questo caso) essendo N il numero di eventi elementari in S.

Quando un esperimento é ripetuto, lo spazio S é costituito da n-uple di rappresentazioni del risultato di un solo esperimento.

Nella pratica si é spesso interessati al calcolo della probabilitá di sequenze che abbiano tutte una caratteristica comune. Ad esempio, se é possibile distinguere le palle dell'urna in base al colore allora puó avere senso cercare la probabilitá di quelle sequenze che in n estrazioni contengono k palle bianche. Ad esempio, per $n = 10$ e $k = 5$ queste sequenze sono: BBBBBNNNNN, BNBNBNBNBN, BNNNBBNBBN, ecc. Ciascuna di queste sequenze é diversa dall'altra in quanto l'ordine in cui compaiono palle bianche e nere é diverso, ma tutte hanno 5 palle nere e 5 palle bianche. Problemi di questo tipo sono comuni nel controllo di qualitá dove si distinguono dispositivi difettosi e dispositivi non difettosi. I due casi di campionamento saranno trattati in modo distinto per evidenziare la differenza del meccanismo di campionamento.

1.6.1 Campionamento con reintroduzione

Determinato il numero di sottoinsiemi di ordine k, é possibile calcolare il numero di sequenze aventi k palle bianche in n estrazioni da un urna contenente N_B palle bianche su un totale di N palle con reintroduzione. Per quanto visto in precedenza il numero di sequenze che contengono k palle bianche in n estrazioni puó essere calcolato come:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

E' tuttavia importante osservare che ciascuna di queste sequenze puó essere realizzata utilizzando palle diverse. Se, ad esempio, le palle bianche fossero numerate da 1 a N_B, allora la successione di 5 palle bianca-nera-bianca-bianca-nera puó essere realizzata scegliendo come prima palla la palla numero 1, oppure numero 2 o 3, ecc. La selezione delle palle bianche nella successione puó essere pensata come l'estrazione con reintroduzione di k palle numerate da un'urna contenente N_B palle. Il numero di tali estrazioni distinte é N_B^n (eq. (1.1)). Per le palle nere é possibile fare un ragionamento analogo, concludendo che le $n - k$ palle nere della sequenza possono essere scelte in $(N - N_B)^{n-k}$ modi diversi. Il numero totale di modi in cui una certa successione é ralizzabile é pertanto:

$$N_B^n (N - N_B)^{n-k}$$

da cui si conclude che il numero totale di sequenze per cui é possibile estrarre k palle bianche in n esperimenti é:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N_B^k (N - N_B)^{n-k}$$

Poiché esistono N^n sequenze possibili utilizzando l'ipotesi di equiprobabilita' degli eventi elementari si ottiene la probabilitá di una singola sequenza: $1/N^n$. La probabilitá di osservare k palle bianche in n esperimenti, $p_n(k)$,é la somma delle probabilitá di tutte le sequenze possibili (sono eventi ad intersezione nulla):

$$p_n(k) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N_B^k (N - N_B)^{n-k}}{N^n} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \tag{1.4}$$

dove $p = N_B/N$ e $q = 1 - p = (N - N_B)/N$ sono le frazioni di palle e nere, rispettivamente. Tali frazioni coincidono con la probabilitá di estrarre una palla bianca o una palla nera in un singolo esperimento.

1.6.2 Campionamento senza reintroduzione

Nel campionamento senza reintroduzione conviene numerare le palle bianche con un numero progressivo da 1 a N_B. Le palle nere saranno numerate con i numeri compresi fra $N_B + 1$ a N.

L'evento per cui si osservano k palle bianche in n estrazioni consiste di tutte quelle sequenze di lunghezza n dove siano presenti in ordine specifico k palle bianche. Per quanto visto in precedenza, il numero di tali successioni fra loro distinte é:

$$\binom{n}{k}$$

Anche in questo caso é importante osservare che ciascuna di queste sequenze puó essere realizzata utilizzando palle diverse. La selezione delle palle bianche nella successione puó essere pensata, questa volta, come all'estrazione senza restiuzione di k palle numerate da un'urna contenente N_B palle. Il numero di tali estrazioni distinte é $(N_B)_k = N_B(N_B-1)(N_B-2)\ldots(N_B-k+1)$. Per le palle nere é possibile fare un ragionamento analogo, concludendo che le $n-k$ palle nere della sequenza possono essere scelte in $(N-N_B)_{n-k}$ modi diversi. Il numero totale di modi in cui una certa successione é ralizzabile é pertanto:

$$(N_B)_k(N-N_B)_{n-k}$$

Se quindi si considerano tutte le successioni fra loro distinte i modi che portano ad ottenere sequenze di k palle bianche sono:

$$\binom{n}{k}(N_B)_k(N-N_B)_{n-k}$$

Poiché il numero totale di sequenze di n palle é $(N)_n$ allora, assumendo che le sequenze siano equiprobabili, la probabilitá é:

$$p_n(k) = \frac{\binom{n}{k}(N_B)_k(N-N_B)_{n-k}}{(N)_n} \tag{1.5}$$

Esempio 1.6.4 Una scatola contiene 20 dispositivi, 3 dei quali difettosi. Verificare che la probabilitá di selezionare (a) un dispositivo difettoso in una singola estrazione é pari a 3/20, (b) nessun dispositivo difettoso in una singola estrazione é 1-3/20.

Per applicare (1.5) in (a) si deve porre: $n = 1$, $N = 20$, $k = 1$, $n-k = 0$ $N_B = 3$, $N - N_B = 17$, quindi:

$$P_1(1) = \frac{\binom{1}{1}(3)_1(17)_0}{(20)_1} = 3/20$$

Nel secondo caso é $n = 1$, $N = 20$, $k = 0$, $n-k = 1$ $N_B = 3$, $N - N_B = 17$, quindi:

$$P_1(0) = \frac{\binom{1}{0}(3)_0(17)_1}{(20)_1} = 1 - 3/20$$

Si noti che $\binom{1}{0} = 1$

Esempio 1.6.5 Una scatola contiene 20 dispositivi, 3 dei quali difettosi. Calcolare la probabilitá che, scegliendo 5 dispositivi:

(a) uno sia difettoso,

(b) due siano difettosi,

(c) nessuno sia difettoso,

(d) due, al massimo, siano difettosi.

Per risolvere il problema occorre applicare (1.5). In (a) si deve porre: $n = 5$, $N = 20$, $k = 1$, $n - k = 4$ $N_B = 3$, $N - N_B = 17$, quindi:

$$P_5(1) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} (3)_1 (17)_4}{(20)_5} = 0.46$$

in (b) é $n = 5$, $N = 20$, $k = 2$, $n - k = 3$ $N_B = 3$, $N - N_B = 17$, quindi:

$$P_5(2) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (3)_2 (17)_3}{(20)_5} = 0.13$$

In (c) $n = 5$, $N = 20$, $k = 0$, $n - k = 5$ $N_B = 3$, $N - N_B = 17$, quindi:

$$P_5(0) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} (3)_0 (17)_5}{(20)_5} = 0.39$$

Il caso (d) é l'unione delle probabilitá degli eventi relativi ai casi (a)-(c), quindi:

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0.98$$

1.7 La legge dei grandi numeri

La legge dei grandi numeri fornisce un modello probabilistico relativo al numero di volte, k, in cui un evento $\mathcal{E}$ si manifesta in n esperimenti. Chiameremo k il numero di successi.

Da quanto visto all'inizio del capitolo, la probabilitá, p, di un evento $\mathcal{E}$ é definita in senso classico come il numero di successi in n esperimenti diviso per n stesso e per n tendente all'infinito (teorema di Bernoulli):

$$\Pr(\mathcal{E}) = \lim_{n \to \infty} \frac{k}{n} = p$$

Il ché ci dice che in n esperimenti (con n elevato):

$$k \approx np$$

Questa scrittura non implica che, necessariamente, k sia prossimo al prodotto np, ma che ció si verificherá **con elevata probabilitá** (quindi puó anche darsi che ció non si verifichi, anche se con probabilitá molto bassa: il caso di 100 teste consecutive in un esperimento di lancio della moneta).

NOTA La sequenza di 100 teste é equiprobabile ad ogni altra sequenza (se $\Pr(T) > \Pr(C)$ allora tale sequenza potrebbe essere, addirittura, la piú probabile). Come si spiega il fatto che $k = 100$ é un risultato altamente improbabile?

Capitolo 2

Indipendenza e dipendenza stocastica

2.1 Probabilitá condizionata

Definiamo la probabilitá di $\mathcal{E}$ condizionata dal verificarsi di $\mathcal{F}$ come una valutazione della probabilitá del verificarsi dell'evento $\mathcal{E}$ sapendo che si é verificato $\mathcal{F}$. Indichiamo tale probabilitá con:

$$\Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})$$

Per chiarire il concetto supponiamo di tirare un dado e di essere interessati nel verificarsi o meno degli eventi $\mathcal{E} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{F} = \{3, 4, 5, 6\}$. Assumendo che ogni rappresentazione sia equiprobabile i due eventi hanno probabilitá, pari a 1/3 (2/6) e 2/3 (4/6), rispettivamente. Supponiamo di essere a conoscenza che si é verificato $\mathcal{F}$. Tale conoscenza non ci dice specificamente quale faccia si sia mostrata, semplicemente che si é mostrata una delle facce in $\mathcal{F}$: c'é una perdita di informazione rispetto alla conoscenza di quale evento elementare si é verificato. Per come sono stati definiti gli eventi, é possibile che si sia verificato contemporaneamente anche $\mathcal{E}$ se é uscita la faccia 3. Quindi é possibile valutare $\Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})$ come la probabilitá che sia uscito uno dei due numeri 2 o 3 sapendo che é uscito uno dei numeri 3, 4, 5, 6. E' abbastanza semplice verificare (assumendo che le facce siano equiprobabili) che ho una probabilitá pari a 0.25 che $\mathcal{E}$ si sia verificato (cioé che sia uscita la faccia 3). In questo caso, la conoscenza di $\mathcal{F}$ non ci fornisce una informazione utile per valutare se si é verificato $\mathcal{E}$ o meno $(1/4 < 1/3)$.

Si noti che tale probabilitá é indipendente da quella dell'evento $\mathcal{E}$ direttamente. Essa dipende dalla probabilitá dell'evento intersezione $\mathcal{EF}$ ed é data da:

$$\Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{\Pr(\mathcal{EF})}{\Pr(\mathcal{F})} \tag{2.1}$$

che é una misura probabilistica dell'intersezione dei due eventi normalizzata rispetto alla misura probabilistica dell'evento condizionante.

Tale probabilitá puó essere espressa utilizzando l'approccio delle frequenze come il limite a cui tende il numero di osservazioni congiunte di $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, $N_{\mathcal{EF}}$, diviso il numero di osservazioni di $\mathcal{F}$, $N_{\mathcal{F}}$ quando il numero di esperimenti tende all'infinito, cioé:

$$\Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{n_{\mathcal{EF}}/n}{n_{\mathcal{F}}/n}$$

La figura 2.1 mostra i casi limite della probabilitá condizionata. Quando due eventi sono mutuamente esclusivi allora la probabilitá condizionata é nulla in quanto sappiamo che se si verifica l'evento condizionante allora non si verifica l'evento condizionato. Viceversa, se l'evento condizionante é un sottoinsieme di quello condizionato, allora siamo certi che il verificarsi del primo comporti il verificarsi anche del secondo, quindi la probabilitá condizionata é unitaria.

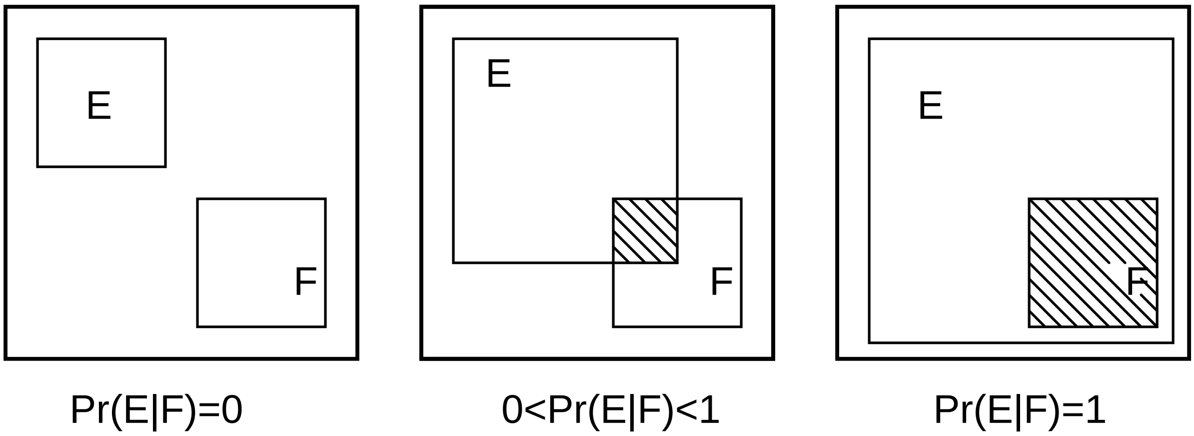


Figura 2.1: Rappresentazione grafica della probabilitá condizionata come rapporto fra aree (misure) di eventi probabilistici

2.2 Indipendenza stocastica

Il concetto di indipendenza é abbastanza semplice da esprimere a parole. In pratica, due eventi sono indipendenti se il verificarsi dell'uno non ci fornisce indicazioni rispetto al verificarsi dell'altro. Da un punto di vista formale come si esplicita ció? Semplicemente dicendo che la probabilitá condizionata dell'evento $\mathcal{E}$ coincide con la probabilitá di $\mathcal{E}$:

$$\Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \Pr(\mathcal{E}) \tag{2.2}$$

Utilizzando l'equazione (2.1) si ottiene:

$$\Pr(\mathcal{E}\mathcal{F}) = \Pr(\mathcal{E}) \Pr(\mathcal{F}) \tag{2.3}$$

Anche in questo caso é utile fornire una rappresentazione grafica del concetto di indipendenza stocastica. Osserviamo che indipendenza stocastica non implica il fatto che gli eventi abbiano intersezione nulla, come si potrebbe pensare. Piuttosto, riscrivendo (2.3) si ottiene:

$$\frac{\Pr(\mathcal{E}\mathcal{F})}{\Pr(\mathcal{F})} = \Pr(\mathcal{E}) = \frac{\Pr(\mathcal{E})}{\Pr(S)}$$

Cioé $\mathcal{E}$ é indipendente da $\mathcal{F}$ se la misura probabilistica dell'intersezione dei due eventi rapportata alla misura probabilistica dell'evento condizionante é identica alla misura probabilistica dell'evento condizionato ($\mathcal{E}$) espressa (per completezza) come rapporto della misura di S (unitaria). Non esiste alcun vantaggio, pertanto, nello sfruttare l'informazione fornita dal verificarsi di $\mathcal{F}$: si veda la figura 2.2

Per chiarire ulteriormente il concetto di indipendenza, consideriamo l'esperimento del lancio di una moneta ripetuto due volte. Sappiamo che, ad ogni lancio é $\Pr(T) = \Pr(C) = 0.5$. Testa e croce sono eventi ad intersezione nulla quindi si puó concludere che essi non sono indipendenti (infatti se si verifica uno non si verifica l'altro e viceversa). Questo potrebbe lasciare perplessi, in quanto é comune pensare al lancio della moneta come ad una successione di eventi fra loro indipendenti. Ció che consente di ricollegarci alla nozione intuitiva é la costruzione corretta dello spazio degli eventi elementari. Infatti, quando si considera un lancio doppio gli eventi elementari sono le coppie:

$$\{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$$

ognuna avente probabilitá pari a 0.25.

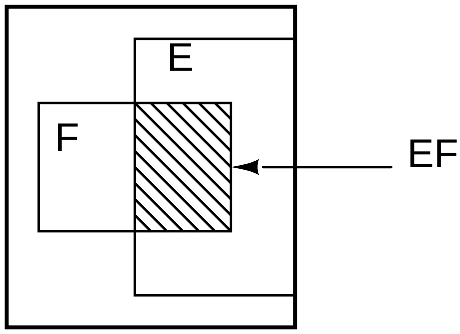


Figura 2.2: Rappresentazione grafica del concetto di indipendenza: l'area di $\mathcal{EF}$ é il 50% dell'area di $\mathcal{F}$. L'area di $\mathcal{E}$ é il 50% dell'area di S. Le aree sono indicative delle misure probabilistiche degli eventi, cioé: area$(\mathcal{E}) \leftrightarrow \Pr(\mathcal{E})$, area$(\mathcal{F}) \leftrightarrow \Pr(\mathcal{F})$, area$(\mathcal{EF}) \leftrightarrow \Pr(\mathcal{EF})$ e area$(S) \leftrightarrow 1$

.

Se si verifica testa al primo lancio allora, alla luce di questa conoscenza, possiamo considerare che i risultati possibili dell'esperimento siano ristretti alle coppie:

$$\{(T,T),(T,C)\}$$

Appare quindi evidente che la probabilitá che si verifichi croce al secondo lancio é pari a 0.5, che coincide con la probabilitá di C non condizionata dalla conoscenza su quanto é avvenuto nel lancio precedente ($\Pr(C \mid T_{\text{lancio precedente}}) = \Pr(C)$).

2.2.1 Chain rule

Sia consideri l'evento:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\ldots\mathcal{E}_n$$

che si verifica al verificarsi simultaneo degli eventi $\mathcal{E}_i$. Applicando la definizione di probabilitá condizionata si ottiene:

$$\Pr(\mathcal{E}_2) = \Pr(\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1)\Pr(\mathcal{E}_1)$$

Procedendo per induzione si arriva a scrivere la cosiddetta "chain rule":

$$\Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E}_1)\Pr(\mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_1)\ldots\Pr(\mathcal{E}_n \mid \mathcal{E}_1\ldots\mathcal{E}_{n-1}) \tag{2.4}$$

Quando gli eventi $\mathcal{E}_i$ siano fra loro indipendenti ($\Pr(\mathcal{E}_i) = \Pr(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_{i-1}\ldots\mathcal{E}_1)$), la "chain rule" diventa un semplice prodotto di probabilitá:

$$\Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E}_1)\Pr(\mathcal{E}_2)\ldots\Pr(\mathcal{E}_n) \tag{2.5}$$

2.2.2 Esempi

Esempio 2.2.1 Calcolare la probabilitá dell seguenti sequenze nel lancio di una moneta: $TCTCT$, $TTTTT$, $CCCCC$, $CTCTC$.

La probabilitá di ogni sequenza é data da:

$$\Pr(T)^{n_T}\Pr(C)^{5-n_T}$$

dove n_T é il numero delle teste in una sequenza. Se $\Pr(T) = \Pr(C) = 0.5$, allora tale probabilitá é dientica per tutte le sequenze e pari a 0.5^5. Si noti che se fosse $\Pr(T) = 0.55$, la sequenza piú probabile sarebbe $TTTTT$, con probabilitá pari a 0.55^5.

Esempio 2.2.2 Un sistema costituito da un numero n di dispositivi si dice

- di tipo serie se la rottura di un dispositivo qualunque ne provoca il guasto: OR logico (ad esempio, gli anelli di una catena, gli isolatori di una linea AT, ecc.),
- di tipo parallelo se é necessario che si rompano tutti i dispositivi perché il sistema si guasti: AND logico (ad esempio, trasformatori posti in parallelo, ognuno avente una potenza nominale pari alla potenza richiesta dal carico).

Nell'ipotesi che i dispositivi si rompano l'uno indipendentemente dall'altro, calcolare le probabilitá di rottura e di tenuta per un sistema di tipo serie ed un sistema di tipo parallelo.

Se R_i é la probabilitá che il dispositivo i-esimo non si guasti e $Q_i = 1 - R_i$ la probabilitá che lo stesso dispositivo si guasti allora, per un sistema di tipo serie, la probabilitá di funzionamento del sistema, R_{SS}, é la probabilitá di funzionamento contemporaneo di tutti i dispositivi. Utilizzando l'ipotesi di indipendenza (eq. (2.3)):

$$R_{SS} = \prod_i R_i < \min(R_i) \tag{2.6}$$

Per un sistema di tipo parallelo la probabilitá di rottura Q_{SP} é data dalla probabilitá di rottura simultanea di tutti i dispositivi. Utilizzando l'ipotesi di indipendenza (eq. (2.3)):

$$Q_{SP} = \prod_i Q_i < \min(Q_i) \tag{2.7}$$

Esempio 2.2.3 Due treni, D_1 e D_2 arrivano indipendentemente in stazione fra le 8.00 e le 8.20. Dalla stazione ripartono al massimo alle 8.20. Il treno D_1 staziona (se il tempo di arrivo lo consente) 4 minuti prima di ripartire, il treno D_2 5 minuti. In altre parole, detti t_1 e t_2 i tempi di arrivo, il treno D_1 é reperibile in stazione nell'intervallo $[t_1, \min(t_1 + 4, 8.20)]$, il treno D_2 nell'intervallo $[t_2, \min(t_2 + 5, 8.20)]$.
Ipotizzando la casualitá dell'arrivo dei due treni, calcolare la probabilitá dei seguenti eventi:

A: D_1 arriva in $[t_a, t_b]$, D_2 in $[t_c, t_d]$,

B: D_1 arriva prima di D_2,

C: i due treni si incontrano in stazione,

D: D_1 arriva prima di D_2 ed i due treni si incontrano in stazione.

L'ipotesi di aleatorietá degli arrivi puó essere descritta matematicamente ipotizzando che la probabilitá di arrivo di un treno in un dato intervallo di lunghezza T dipenda solo da T e non dall'istante iniziale dell'intervallo. Quindi:

$$P_1 = \Pr(D_1 \text{ arriva in } [t_a, t_b]) = \frac{t_b - t_a}{20}$$

$$P_2 = \Pr(D_2 \text{ arriva in } [t_c, t_d]) = \frac{t_d - t_c}{20}$$

L'evento A é il verificarsi simultaneo dei due eventi precedenti, quindi, ipotizzando l'indipendenza degli arrivi (eq. (2.3), figura 2.3A):

$$\Pr(A) = P_1 P_2 = \frac{(t_b - t_a)(t_d - t_c)}{20^2}$$

Per quanto concerne l'evento B, cioé D_1 arriva prima di D_2, ció si verifica quando $t_1 < t_2$, quindi per tutte le coppie (t_1, t_2) appartenenti alla metá superiore del rettangolo. Tale triangolo puó essere pensato come l'unione di eventi, simili a quello del caso A, ma infinitesimi. Ne deriva che, la probabilitá cercata, sotto l'ipotesi di indipendenza, é pari al 50%.

L'evento C, cioé l'incontro dei due treni in stazione, puó essere scisso in due eventi ad intersezione nulla:

$$\mathcal{E} = \{t_1 \le t_2 \le t_1 + 4\}$$

$$\mathcal{F} = \{t_2 \le t_1 \le t_2 + 5\}$$

Le aree di tali eventi sono rappresentate in figura 2.4 e valgono:

$$A_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{20\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} = 72$$

$$A_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{20\sqrt{2} + 15\sqrt{2}}{2} = 87.5$$

Quindi

$$\Pr(\mathcal{E} + \mathcal{F}) = \frac{72 + 87.5}{20^2} = 0.398$$

L'ultimo caso é una valutazione di probabilitá condizionata $\Pr(B \mid C) = \Pr(BC)/\Pr(C)$:

$$\Pr(D) = \frac{A_1}{A_1 + A_2} = \frac{72}{159.5} = 0.45$$

2.3 Numero di successi in esperimenti ripetuti

Il problema che ci accingiamo a studiare é di fondamentale importanza della teoria delle probabilitá. Esso é utilizzato in moltissime applicazioni pratiche, ad esempio, per determinare quale é la probabilitá che una macchina abbia k guasti nel corso di un anno, per determinare quante macchine installate avranno un guasto di un certo tipo, quale sará il numero di difetti per unitá di lunghezza di un cavo elettrico ecc.

Il problema si formula a partire da un evento $\mathcal{E}$ di cui sia specificata la probabilitá, p. Considerazioni elementari viste in precedenza ci portano a scrivere che il complementare di $\mathcal{E}$, $\overline{\mathcal{E}}$, ovvero l'evento per cui non si verifica l'evento $\mathcal{E}$ ha probabilitá $q = 1 - p$. Consideriamo inoltre come una ipotesi fondamentale che:

$$\Pr(\mathcal{E} \mid \text{ risultato esperimento precedente}) = \Pr(\mathcal{E})$$

qualunque sia tale risultato (indipendenza stocastica). Ció che si intende calcolare é la probabilitá che in una sequenza di n esperimenti l'evento $\mathcal{E}$ si verifichi k volte. Indicheremo ció come l'evento che si abbiano

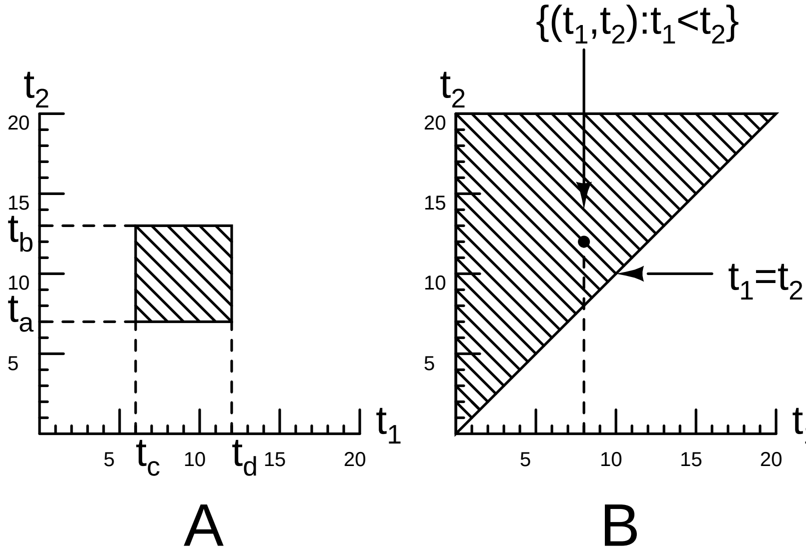


Figura 2.3: Rappresentazione grafica (A) della probabilitá dell'evento A, pari all'area del rettangolo tratteggiato espressa in valore relativo all'area del rettangolo di lato 20, (B) della probabilitá dell'evento B, pari all'area del triangolo tratteggiato espressa in valore relativo all'area del rettangolo di lato 20

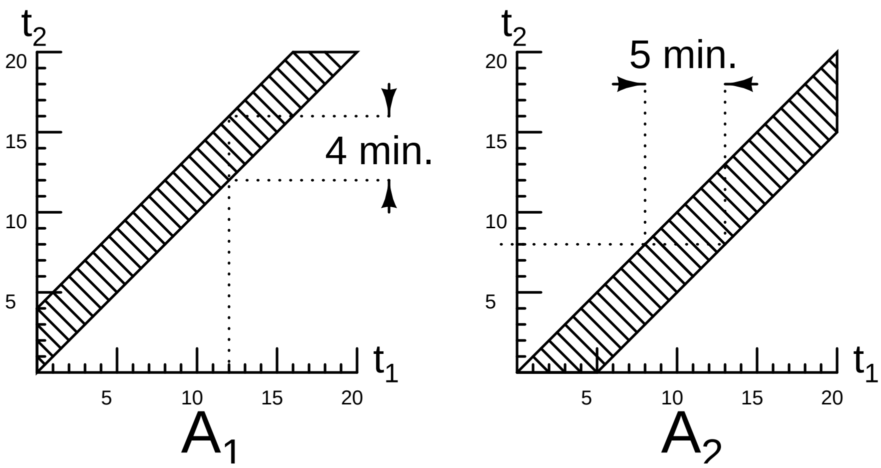


Figura 2.4: Rappresentazione grafica della probabilitá dell'evento $\mathcal{E}$, pari all'area del trapezio tratteggiato espressa in valore relativo all'area del rettangolo di lato 20, A1, della probabilitá dell'evento $\mathcal{F}$, pari all'area del trapezio tratteggiato espressa in valore relativo all'area del rettangolo di lato 20, A2.

k successi in n esperimenti ripetuti. Una sequenza avente ordine specifico (cioé una sequenza in cui i k esperimenti in cui si verifica $\mathcal{E}$ hanno indici assegnati) ha probabilitá data dal prodotto delle probabilitá dei singoli eventi (gli esperimenti sono indipendenti) sia quelli in cui $\mathcal{E}$ si verifica, sia quelli in cui non si verifica:

$$\Pr(k \text{ successi in ordine specifico}) = p^k q^{n-k} \tag{2.8}$$

Quindi la probabilitá che si verifichi una sequenza qualsiasi di k successi é la somma delle probabilitá (OR) di tutte le sequenze (equiprobabili) di k successi:

$$\Pr(k \text{ successi in qualsiasi ordine}) = p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k}$$

Poiché tali sequenze sono equiprobabili e ne esistono $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, allora:

$$\Pr(k \text{ successi in qualsiasi ordine}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \tag{2.9}$$

che é nota come distribuzione di probabilitá binomiale. Infine la probabilitá che si verifichino al piú k successi in n esperimenti é:

$$\Pr(\text{al massimo } k \text{ successi in qualsiasi ordine}) = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i q^{n-i} \tag{2.10}$$

e la probabilitá che si verifichi un numero maggiore o uguale a k di successi é:

$$\Pr(\text{almeno } k \text{ successi in qualsiasi ordine}) = \sum_{i=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i q^{n-i} \tag{2.11}$$

2.4 Approssimazioni della distribuzione binomiale

2.4.1 Il teorema di deMoivre Laplace

Il teorema di deMoivre-Laplace lega la probabilitá di osservare k successi (in un ordine qualsiasi) in n esperimenti di un evento avente probabilitá p:

$$\Pr(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \text{ in qualsiasi ordine}$$

ad una espressione di tipo esponenziale. Il teorema di deMoivre-Laplace asserisce che se

$$npq >> 1$$

e

$$k \approx np$$

allora:

$$\Pr(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(\frac{-(k-np)^2}{2npq}\right) \tag{2.12}$$

La funzione a secondo membro dell'approssimazione di deMoivre-Laplace é la cosiddetta funzione gaussiana, o normale, di solito indicata come:

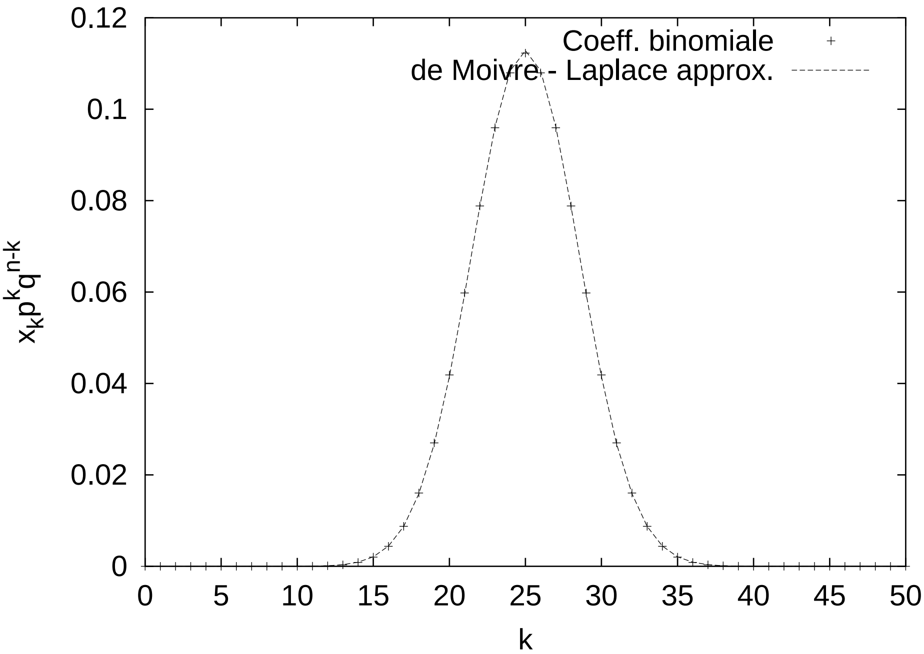


Figura 2.5: Andamento del coefficiente binomiale per M=50 ottenuto al variare di k ed approssimazione mediante la legge di de Moivre-Laplace.

$$g(x,[\eta,\sigma]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(\frac{x-\eta}{\sigma})^2\Big)$$

dove i termini entro parentesi quadra sono i parametri della funzione che, generalmente vengono omessi. La funzione gaussiana ha area unitaria. Alcuni andamenti della funzione gaussiana sono riportati nella figura 2.6 per mostrare l'influenza di tali parametri sulla curva stessa. In particolare, il parametro η coincide con l'asse di simmetria della funzione e con il massimo della funzione stessa. Inoltre, poiché l'area sottesa dalla funzione é unitaria, bassi valori di σ (che producono alti valori di $g(x)$ in prossimitá di η) costringono la campana a decrescere molto velocemente e ad essere concentrata attorno all'asse di simmetria (minore dispersione).

2.4.2 Il teorema di Poisson

Il teorema di Poisson fornisce un'altra approssimazione della distribuzione binomiale. Tale approssimazione vale sotto le condizioni:

$$p \ll 1$$

$$n \text{ molto grande} \rightarrow np \approx npq$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k} \approx \exp(-np)\frac{(np)^k}{k!} \tag{2.13}$$

Esempio 2.4.1 Supponiamo di volere calcolare la probabilitá che si selezionino $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$ dispositivi difettosi in un campione di numerositá $n=10$ da un lotto di $N=10000$ dispositivi, $D=50$ dei quali sono difettosi.

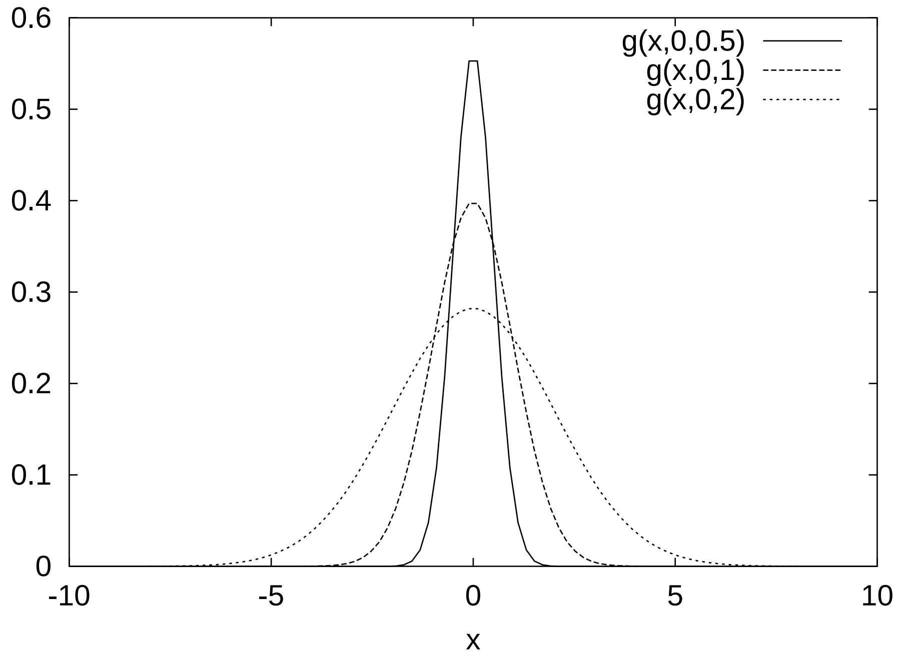


Figura 2.6: Andamento di alcune funzioni gaussiane. Il parametro η (posto uguale a 0 nella figura) corrisponde al centro di simmetria della campana. Al diminuire del parametro σ la campana diventa via via piú alta e piú stretta.

La probabilitá di ottenere un elemento difettoso alla prima estrazione é $p = D/N = 0.005$. Semplifichiamo la trattazione, al momento, ipotizzando che tale probabilitá rimanga approssimativamente inalterata nelle successive estrazioni $N \ll n$. Allora, basta applicare (2.9):

$$\Pr(k \text{ successi in qualsiasi ordine}) = \binom{10}{k} (0.005)^k (0.995)^{10-k}$$

I risultati sono 0.95111 0.04779 0.00108 0.00001. Come é logico, al crescere di k diminuisce la probabilitá dell'evento. Quindi, se viene stabilito che il compratore rifiuta di comprare la produzione se si hanno k dispositivi difettosi é chiaro che al crescere di k il compratore ha sempre piú probabilitá di acquistare la partita.

Cosa succede se aumentiamo n e lo portiamo a 20. Evidentemente le probabilitá di ottenere k successi devono aumentare, ad eccezione del caso $k = 0$. Infatti, applicando:

$$\Pr(k \text{ in qualsiasi ordine}) = \binom{20}{k} (0.005)^k (0.995)^{20-k}$$

si ottiene: 0.90461, 0.09092, 0.00434, 0.00013.

Esempio 2.4.2 Probabilitá di ottenere $k = 2$ teste nel lancio ripetuto 3 volte di una moneta (o nel lancio di tre monete):

$$\Pr(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3/8$$

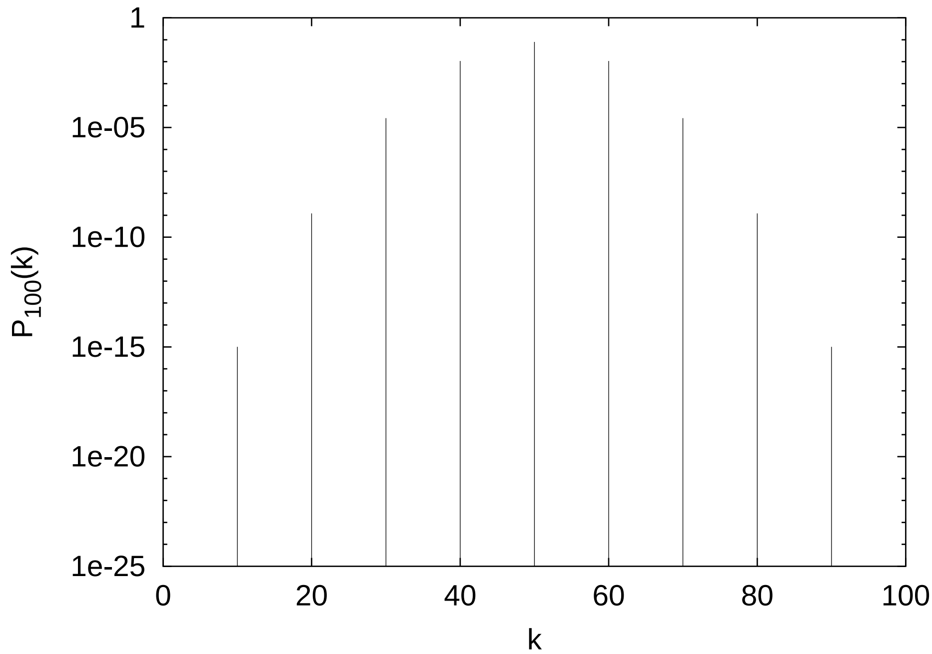


Figura 2.7: Probabilitá di ottenere k teste nel lancio ripetuto 100 volte di una moneta ($\Pr(T) = \Pr(C) = 1/2$).

Esempio 2.4.3 Nel lancio ripetuto 100 volte di una moneta, calcolare la probabilitá di avere k teste a partire da $k = 0$ e con incrementi di 10. Calcolare inoltre la probabilitá che il numero di teste sia $40 \leq k \leq 60$, $30 \leq k \leq 70$ e $20 \leq k \leq 80$

Utilizzando l'approssimazione di de Moivre-Laplace si deve calcolare $g(k, [\eta, \sigma])$ per $\eta = np = 50$ e $\sigma = \sqrt{npq} = 5$. I risultati sono raccolti, sinteticamente, nella figura 2.7

Si osservi che la probabilitá di una singola sequenza corrisponde alla probabilitá delle sequenze con 0 teste o, alternativamente, 100 teste. Infatti, esiste una sola sequenza con 0 teste ($CCC \dots C$) ed una sola sequenza con 100 teste ($TTT \dots T$). Tale probabilitá, cioé la probabilitá di una sequenza con teste e croci in ordine specifico, é estremamente bassa ($1.539\ 10^{-23}$).

La seconda parte si ottiene calcolando:

$$\Pr(40 \leq \boldsymbol{k} \leq 60) = \sum_{i=40}^{60} g(i, [50, 5]) = 0.965$$

$$\Pr(30 \leq \boldsymbol{k} \leq 70) = \sum_{i=30}^{70} g(i, [50, 5]) = 0.9996$$

$$\Pr(20 \leq \boldsymbol{k} \leq 80) = \sum_{i=20}^{80} g(i, [50, 5]) = 0.999999999$$

(il numero k é stato scritto in grassetto per evidenziare il fatto che é un numero aleatorio; l'utilizzo di questa notazione sará chiarito nel prossimop capitolo). In pratica, l'evento di ottenere una sequenza con un numero di teste compreso fra 20 ed 80 puó essere assimilata all'evento certo.

Esempio 2.4.4 Da prove effettuate si é stabilito che un certo tipo di macchina ha una probabilitá pari a 0.0001 di subire un guasto permanente (che necessita interventi di manutenzione) nel corso di un anno. Supponiamo che in uno stabilimento siano installate 100 macchine. Quale é la probabilitá che al massimo 10 subiscano un intervento di manutenzione nel corso di un anno?

In questo caso non stiamo parlando di un esperimento in cui esista una vera e propria successione temporale degli eventi, come nel lancio di una moneta. Tuttavia, il modello probabilistico, avendo ogni esperimento condotto in parallelo la medesima probabilitá di successo (che in questo caso é un insucesso, dal punto di vista tecnico) é identico a quello mostrato in precedenza. Esattamente come se si considerasse il caso di un lancio simultaneo di n monete e si intendesse stabilire la probabilitá di k teste.

Applicando (2.10) si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{100}{i} (0.0001)^i (1-0.0001)^{100-i} \approx 1$$

Esempio 2.4.5 Nel caso dello stabilimento precedente. Supponiamo che se 2 o piú macchine, simultaneamente, subiscono un guasto permanente nel corso di una settimana allora la produzione si arresta. Quale é la probabilitá che la produzione si arresti.

Supponiamo che lo stabilimento lavori 45 settimane all'anno. La probabilitá di avere un guasto la supponiamo ripartita uniformemente nel corso dell'anno, quindi p=0.0001/45. Applicando (2.11) otteniamo la probabilitá cercata:

$$\sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (0.0001/35)^i (1-0.0001/45)^{n-i} = 2.4441\ 10^{-6}$$

2.5 Probabilitá totale

Sia $\{\mathcal{F}_i, i = 1, \ldots, n\}$ una partizione di S, cioé un insieme di eventi che soddisfi:

- $\bigcap_i \mathcal{F}_i = \emptyset$
- $\bigcup_i \mathcal{F}_i = S$

E' immediato dimostrare che

$$\Pr(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}_i) \Pr(\mathcal{F}_i) \tag{2.14}$$

Tale teorema é noto come teorema della probabilitá totale. La dimostrazione é immediata:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}S = \mathcal{E}(\mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{F}_n) = \mathcal{E}\mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{E}\mathcal{F}_n$$

Poiché tutti gli eventi nella sommatoria sono indipendenti la probabilitá di $\mathcal{E}$ é la somma delle probabilitá dei singoli eventi del tipo $\mathcal{E}\mathcal{F}_i$. Applicando (2.1) si giunge al risultato desiderato.

Esempio 2.5.1 (Alimentazione di un carico elettrico) Due linee poste in parallelo e di potenza nominale pari a 1 p.u. alimentano un carico. Sia A la probabilitá che una linea sia in servizio (availability), $U = 1 - A$ la probabilitá che una linea sia fuori servizio (unavailability) e si supponga che i guasti delle linee siano indipendenti. Quale é la probabilitá che non si riesca ad alimentare il carico se P_1 é la probabilitá che il carico ecceda 1 p.u. e P_2 quella che ecceda 2 p.u..

Formiamo gli eventi elementari relativi allo stato delle due linee:

$$\begin{aligned} A_1 &= (L_1, L_2) \\ A_2 &= (L_1, \overline{L_2}) \\ A_3 &= (\overline{L_1}, L_2) \\ A_4 &= (\overline{L_1}, \overline{L_2}) \end{aligned}$$

essendo L_k l'evento "la linea k funziona" e $\overline{L_k}$ l'evento "la linea k non funziona". Le probabilitá di tali eventi, essendo l'evento del guasto di una linea indipendente dal guasto di un'altra linea, si calcolano immediatamente utilizzando (2.3):

$$\begin{aligned} \Pr(A_1) &= A^2 \\ \Pr(A_2) &= UA \\ \Pr(A_3) &= UA \\ \Pr(A_4) &= U^2 \end{aligned}$$

Gli eventi elencati esauriscono tutte le possibili combinazioni dello stato delle linee e non si intersecano. Essi formano pertanto una partizione dello spazio delle configurazioni del sistema. Se G é l'evento "incapacitá di trasmettere la potenza richiesta", allora:

$$\begin{aligned} \Pr(G \mid A_1) &= P_2 \\ \Pr(G \mid A_2) &= P_1 \\ \Pr(G \mid A_3) &= P_1 \\ \Pr(G \mid A_4) &= 1 \end{aligned}$$

Applicando il teorema della probabilitá totale si ottiene:

$$\Pr(G) = P_2 A^2 + 2 P_1 U A + U^2$$