

# Appunti del corso di Affidabilità e Diagnostica dei Sistemi Elettrici

Andrea Cavallini, Gian Carlo Montanari  
DIE-Università di Bologna  
viale Risorgimento 2, 40136 Bologna  
[andrea.cavallini@mail.ing.unibo.it](mailto:andrea.cavallini@mail.ing.unibo.it)  
<http://limat.ing.unibo.it>

A.A 1999/2000

# Indice

<b>1</b>	<b>Calcolo delle probabilità</b>	<b>6</b>
1.1	Esperimento aleatorio . . . . .	6
1.2	Eventi e spazi rappresentativi . . . . .	6
1.3	Algebra degli eventi . . . . .	7
1.4	Probabilità . . . . .	9
1.5	Alcune conseguenze degli assiomi (1)-(3) . . . . .	10
1.5.1	Probabilità di $\emptyset$ . . . . .	10
1.5.2	Probabilità di $\bar{\mathcal{E}}$ . . . . .	10
1.5.3	Probabilità di $\mathcal{E} - \mathcal{F} = \mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}$ . . . . .	10
1.5.4	Probabilità di $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ . . . . .	11
1.6	Combinazioni di eventi equiprobabili: il campionamento . . . . .	13
1.6.1	Campionamento con reintroduzione . . . . .	17
1.6.2	Campionamento senza reintroduzione . . . . .	18
1.7	La legge dei grandi numeri . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Indipendenza e dipendenza stocastica</b>	<b>20</b>
2.1	Probabilità condizionata . . . . .	20
2.2	Indipendenza stocastica . . . . .	21
2.2.1	Chain rule . . . . .	22
2.2.2	Esempi . . . . .	22
2.3	Numero di successi in esperimenti ripetuti . . . . .	24
2.4	Approssimazioni della distribuzione binomiale . . . . .	26
2.4.1	Il teorema di deMoivre Laplace . . . . .	26
2.4.2	Il teorema di Poisson . . . . .	27
2.5	Probabilità totale . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Variabili aleatorie</b>	<b>32</b>
3.1	Il concetto di variabile aleatoria . . . . .	32
3.2	Eventi . . . . .	33
3.3	Funzioni di distribuzione . . . . .	34
3.4	Densità di probabilità . . . . .	37
3.4.1	Classificazione delle VA ed eventi delle VA continue . . . . .	37
3.4.2	Densità di probabilità . . . . .	39
3.4.3	VA discrete come caso particolare di VA continue . . . . .	39

3.4.4	VA miste . . . . .	40
3.5	Percentili . . . . .	40
3.6	Trasformazioni lineari . . . . .	41
3.7	Funzioni di uso comune . . . . .	42
3.7.1	Distribuzione normale (gaussiana) . . . . .	43
3.7.2	Distribuzione lognormale . . . . .	48
3.7.3	Distribuzione di Weibull . . . . .	50
3.7.4	Distribuzione esponenziale . . . . .	51
3.7.5	Distribuzione chi-quadro . . . . .	52
3.7.6	Legge di probabilità , di Student . . . . .	53
3.7.7	La distribuzione $F$ di Snedecor . . . . .	54
3.8	Distribuzioni condizionate . . . . .	54
3.9	Appendice 1: L'impulso di Dirac e derivata generalizzata . . . . .	57
3.9.1	Definizione . . . . .	57
3.9.2	Derivata di funzioni con discontinuitá . . . . .	59
3.10	Appendice 2: Tavole della distribuzione normale . . . . .	60
3.11	Appendice 3: Tavole della distribuzione chi-quadro . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Variabili aleatorie bivariate</b>	<b>65</b>
4.1	Eventi . . . . .	65
4.2	Distribuzione e densitá di probabilità . . . . .	66
4.3	Distribuzioni marginali . . . . .	66
4.4	Variabili aleatorie congiuntamente normali . . . . .	69
4.5	Indipendenza stocastica . . . . .	69
4.6	Alcune funzioni di VA doppie . . . . .	70
4.6.1	Somma di due variabili aleatorie . . . . .	70
4.6.2	Differenza di due VA . . . . .	72
4.6.3	Massimo di due VA . . . . .	73
4.6.4	Minimo di due VA . . . . .	74
4.7	Distribuzioni condizionate . . . . .	75
4.7.1	Variabili aleatorie congiuntamente normali . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Momenti di una variabile aleatoria</b>	<b>79</b>
5.1	Previsione di una variabile aleatoria . . . . .	79
5.1.1	Previsione di una sequenza di dati . . . . .	79
5.1.2	Comportamento asintotico: il valore atteso e media . . . . .	80
5.1.3	La probabilità come valore atteso . . . . .	82
5.1.4	Esistenza del valore atteso . . . . .	82
5.1.5	Linearitá del valore atteso . . . . .	83
5.1.6	Altre misure di intensitá . . . . .	83
5.2	Momenti del secondo ordine di VA univariate: varianza . . . . .	84
5.3	Il lemma di Tchebycheff . . . . .	86
5.4	Altre misure di dispersione . . . . .	88
5.5	Momenti di ordine superiore a 2 . . . . .	88

5.6	Momenti del secondo ordine di VA doppie: covarianza . . . . .	89
5.6.1	Trasformazioni lineari . . . . .	92
5.7	Il teorema del limite centrale . . . . .	94
5.8	Valore atteso e varianza condizionati . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Affidabilità</b>	<b>99</b>
6.1	Generalità sul guasto . . . . .	99
6.2	Sistemi non riparabili . . . . .	101
6.2.1	Funzioni affidabilistiche empiriche . . . . .	103
6.2.2	Il tasso di guasto istantaneo . . . . .	104
6.2.3	Parametri affidabilistici . . . . .	106
6.3	Tasso di guasto per componenti elettronici . . . . .	107
6.4	Generalità, concetto di missione . . . . .	110
6.5	Il diagramma affidabilistico . . . . .	110
6.6	Strutture semplici . . . . .	112
6.6.1	Sistemi di tipo serie . . . . .	112
6.6.2	Sistemi di tipo parallelo (ridondanza) . . . . .	112
6.6.3	Combinazione di strutture tipo serie e parallelo . . . . .	113
6.6.4	Influenza del modo di guasto dei dispositivi . . . . .	113
6.7	Strutture complesse . . . . .	116
6.7.1	Il metodo della probabilità totale . . . . .	116
6.7.2	Il metodo dello spazio degli stati . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Disponibilità</b>	<b>119</b>
7.1	Definizioni . . . . .	119
7.1.1	Analisi con le catene di Markov . . . . .	120
7.2	Analisi combinatoria . . . . .	121
7.2.1	Frequenza . . . . .	121
7.3	Analisi di sistemi serie/parallelo . . . . .	124
7.3.1	Sistemi con dispositivi a guasti indipendenti . . . . .	124
7.3.2	Sistemi con dispositivi a guasti dipendenti . . . . .	127
7.4	Ridondanza . . . . .	129
7.5	Analisi affidabilistica di un sistema di distribuzione radiale . . . . .	132
7.5.1	Considerazioni generali . . . . .	132
7.5.2	Criterio di guasto . . . . .	134
7.5.3	Sistema radiale semplice (1) . . . . .	135
7.5.4	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione esterna all'impianto. . . . .	138
7.5.5	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione alla sbarra di media tensione dell'utente. . . . .	141
7.5.6	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione al primario del trasformatore. . . . .	143
7.5.7	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione al secondario del trasformatore. . . . .	145

<b>8</b>	<b>Metodi empirici</b>	<b>147</b>
8.1	Stima empirica delle leggi di probabilità . . . . .	147
8.2	Percentili . . . . .	152
8.3	Carte probabilistiche . . . . .	152
8.4	Stima empirica di momenti e percentili . . . . .	154
8.4.1	Valore atteso . . . . .	154
8.4.2	Varianza . . . . .	155
8.4.3	Covarianza e correlazione empiriche . . . . .	155
8.4.4	Momenti . . . . .	156
<b>9</b>	<b>Stime puntuali</b>	<b>157</b>
9.1	Introduzione . . . . .	157
9.2	Proprietà degli stimatori . . . . .	157
9.3	Il metodo dei momenti . . . . .	161
9.4	Principio di massima verosimiglianza, ML . . . . .	163
9.4.1	Proprietà dello stimatore ML . . . . .	164
9.4.2	Stima ML della probabilità di un evento . . . . .	165
9.4.3	Stima dei parametri di una distribuzione normale . . . . .	166
9.4.4	Stima ML del tasso di guasto . . . . .	166
9.4.5	Stima dei parametri di una distribuzione di Weibull . . . . .	168
<b>10</b>	<b>Stime per intervalli</b>	<b>170</b>
10.1	Introduzione . . . . .	170
10.2	Quantità pivotali . . . . .	170
10.2.1	Il metodo della quantità pivotale . . . . .	173
10.3	Campionamento da una distribuzione normale . . . . .	174
10.3.1	Calcolo degli intervalli di confidenza per la media . . . . .	174
10.3.2	Varianza . . . . .	176
10.3.3	Rapporto di varianze . . . . .	176
10.4	Il metodo statistico . . . . .	177
10.5	Intervallo di confidenza per la probabilità . . . . .	179
10.5.1	Calcolo mediante l'approssimazione normale . . . . .	181
10.6	Intervallo di confidenza per $\lambda$ di una distribuzione esponenziale . . . . .	182
<b>11</b>	<b>Verifica delle ipotesi</b>	<b>185</b>
11.1	Introduzione . . . . .	185
11.2	Ipotesi parametriche . . . . .	185
11.2.1	Esempio di test per la media . . . . .	188
11.2.2	Ipotesi semplici e composte . . . . .	189
11.3	Test bidirezionali . . . . .	192
11.3.1	Intervalli di confidenza . . . . .	193
11.4	Test unidirezionali . . . . .	194
11.4.1	Intervalli di confidenza . . . . .	194
11.5	Test sulla media . . . . .	195

11.5.1 Test bidirezionale . . . . .	195
11.5.2 Test unidirezionali . . . . .	197
11.6 Test sulla varianza per distribuzioni normali . . . . .	198
11.7 Test sul rapporto delle varianze per distribuzioni normali . . . . .	198
11.7.1 Test bidirezionali . . . . .	198
11.7.2 Test unidirezionali . . . . .	199
11.8 Test su due medie . . . . .	199
11.8.1 Varianze identiche . . . . .	199
11.8.2 Varianze diverse . . . . .	200
11.9 Test bilaterali . . . . .	201
11.9.1 Test bilaterale sulla probabilità . . . . .	202
11.9.2 Test bilaterale su <i>MTBF</i> . . . . .	203
11.9.3 Test sequenziali . . . . .	205
11.10 Test non parametrici . . . . .	206
11.10.1 Test di adattamendo del chi quadrato . . . . .	206

## Capitolo 10

# Stime per intervalli

### 10.1 Introduzione

La stima puntuale di un parametro non fornisce una indicazione relativa all'incertezza della stima, in quanto il valore vero del parametro può differire anche in modo significativo dal valore stimato. Ciò è tanto più vero tanto più la dimensione del campione è ridotta. Oltre al valore stimato è quindi opportuno fornire anche un intervallo, che comprende il valore stimato, all'interno del quale il valore vero del parametro è contenuto con una probabilità  $\gamma$ , nota come confidenza. L'intervallo così fornito è noto come intervallo di confidenza. Gli estremi dell'intervallo debbono essere considerati come variabili aleatorie, infatti dipendono dal campione.

In generale, l'intervallo di confidenza di un parametro è tanto più piccolo quanto maggiore è la dimensione del campione e quanto più è alta l'efficienza dello stimatore impiegato. Intervalli di confidenza di ampiezza limitata (relativamente alla stima puntuale del parametro) indicano che la stima puntuale è precisa.

### 10.2 Quantità pivotali

Si consideri il problema della stima del valore atteso di una VA  $\mathbf{x}$ . La stima puntuale, come è noto, è data dalla media aritmetica delle  $n$  osservazioni disponibili nel campione  $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Come sempre è fondamentale osservare che la media su  $n$  osservazioni non può essere nota a priori e, pertanto, deve essere considerata come una VA:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$$

Per determinare l'intervallo di confidenza della media, si procede, innanzitutto, determinando la legge di probabilità di  $\bar{\mathbf{x}}$ . Per il teorema del limite centrale, il valore medio di  $\mathbf{x}$ , essendo la somma di  $n$  VA indipendenti  $\mathbf{x}_i$ , segue, per  $n$  sufficientemente alto, una legge di probabilità normale. Ciò è vero a prescindere dalla distribuzione di  $\mathbf{x}$ . Il valore medio ha valore atteso e deviazione standard facilmente deducibili da quelli della VA  $\mathbf{x}$ . Infatti, il valore atteso della media è  $\eta_{\mathbf{x}}$ , la deviazione standard è  $\sigma_{\mathbf{x}}/\sqrt{n}$ . Pertanto è

$$\bar{\mathbf{x}} \sim N(\eta_{\mathbf{x}}, \sigma_{\mathbf{x}}/\sqrt{n})$$

Sia ora  $\mathbf{z}$  una VA definita a partire da  $\bar{\mathbf{x}}$ : come:

$$z = \frac{\bar{x} - \eta_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \eta_x}{\sigma_x}$$

tale VA ha distribuzione  $N(0, 1)$  (cioé normale normalizzata), indipendente da  $\eta_x$  e  $\sigma_x$ . Una VA  $z$ , derivata da una statistica  $T(\mathcal{X})$ , che gode della proprietà che la distribuzione di  $z$  non dipende dai parametri della distribuzione di  $x$  viene indicata come quantità pivotale. Detta  $\phi(z)$  la densità di probabilità di una VA normale normalizzata, é possibile calcolare la probabilità che  $z$  sia contenuta in un intervallo di estremi  $a$  e  $b$ :

$$\Pr(z \in [a, b]) = \int_a^b \phi(z) dz$$

In particolare, per un intervallo centrato attorno allo 0, é:

$$\Pr(z \in [-a, a]) = \int_{-a}^a \phi(z) dz = 2\Phi(a) - 1$$

Ponendo  $a = 1.96$ , risulta:

$$\Pr(z \in [-1.96, 1.96]) = 2\Phi(1.96) - 1 = 0.95$$

cioé:

$$\Pr\left(-1.96 \leq \frac{\bar{x} - \eta_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \leq 1.96\right) = 0.95 \quad (10.1)$$

per le proprietà della trasformazione lineare di VA ( $z$  é derivata dalla media di  $x$  mediante una trasformazione lineare) é possibile scrivere l'equazione precedente come:

$$\Pr\left(\bar{x} - 1.96\sigma_x/\sqrt{n} \leq \eta_x \leq \bar{x} + 1.96\sigma_x/\sqrt{n}\right) = 0.95 \quad (10.2)$$

L'equazione (10.2), deve essere interpretata nel modo seguente: se si ripete infinite volte l'esperimento di estrazione di  $n$  campioni e, ad ogni esperimento, si calcola la media,  $\bar{x}$ , e l'intervallo di estremi  $\bar{x} - 1.96\sigma_x/\sqrt{n}$  e  $\bar{x} + 1.96\sigma_x/\sqrt{n}$  allora, nel 95% dei casi,  $\eta_x$  é contenuto nell'intervallo calcolato, cioé:

$$\Pr\left(\eta_x - 1.96\sigma_x/\sqrt{n} \leq \bar{x} \leq \eta_x + 1.96\sigma_x/\sqrt{n}\right) = 0.95 \quad (10.3)$$

Il comportamento dell'intervallo di confidenza cosí calcolato é illustrato, schematicamente, in 10.1. Si noti che gli estremi dell'intervallo di confidenza sono variabili aleatorie che, nel caso mostrato, dipendono dal valore medio,  $\bar{x}$ , delle  $n$  realizzazioni della variabile aleatoria considerata.

L'equazione (10.2) permette di calcolare gli estremi dell'intervallo di confidenza per il valore atteso di una VA. Il valore atteso sarà infatti compreso con una confidenza pari al 95% nell'intervallo di estremi  $\bar{x} - 1.96\sigma_x/\sqrt{n}$  e  $\bar{x} + 1.96\sigma_x/\sqrt{n}$ . E' importante osservare che, all'aumentare del numero delle osservazioni, l'intervallo di confidenza sarà via via piú concentrato attorno al valore atteso  $\eta_x$ . Al contrario, aumentando la confidenza, l'intervallo si allarga. Ad esempio, per una confidenza del 98% l'intervallo di confidenza ha estremi  $\bar{x} - 2.326\sigma_x/\sqrt{n}$  e  $\bar{x} + 2.326\sigma_x/\sqrt{n}$ . Il nuovo coefficiente moltiplicativo, pari 2.326, si determina come:

$$k = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \quad (10.4)$$

con  $\gamma = 0.98$ . L'ampiezza dell'intervallo di confidenza per  $n$  che varia da 1 a 1000 per diversi valori di  $\gamma$  é mostrata in figura 10.3



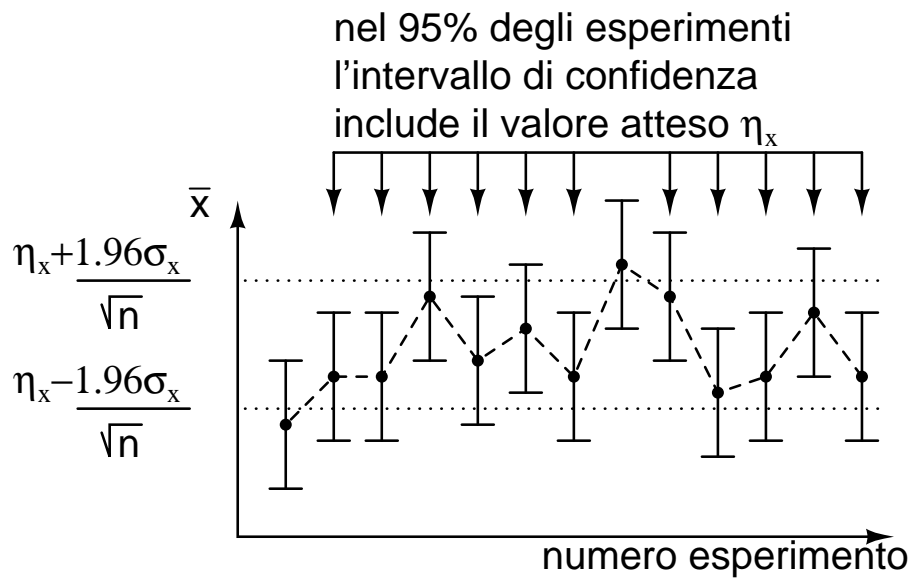


Figura 10.1: Comportamento dell'intervallo di confidenza bilaterale. In una frazione  $\gamma$  degli esperimenti l'intervallo comprende il vero valore del parametro (in questo caso  $\eta_x$ ).

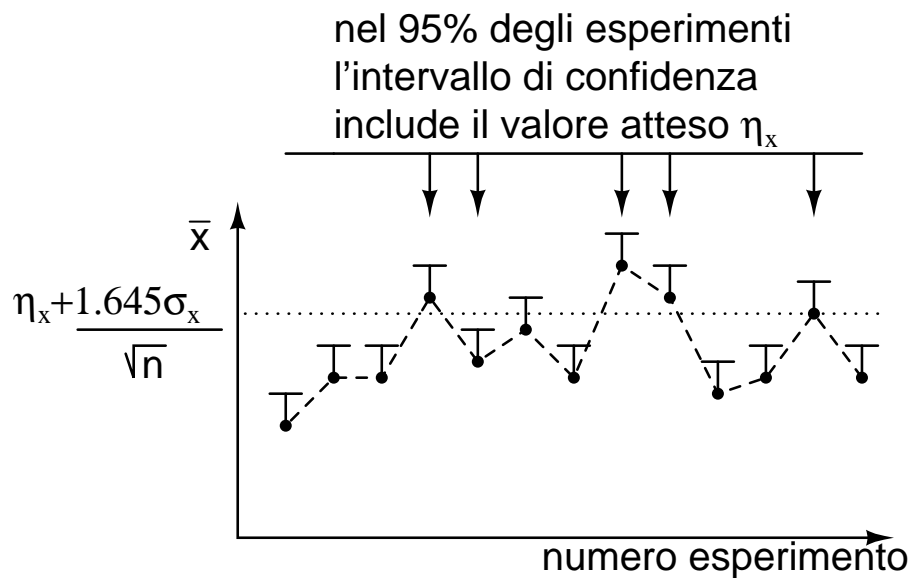


Figura 10.2: Comportamento dell'intervallo di confidenza unilaterale sinistro. In una frazione  $\gamma$  degli esperimenti l'intervallo (che si estende fino a  $-\infty$ ) comprende il vero valore del parametro (in questo caso  $\eta_x$ ).

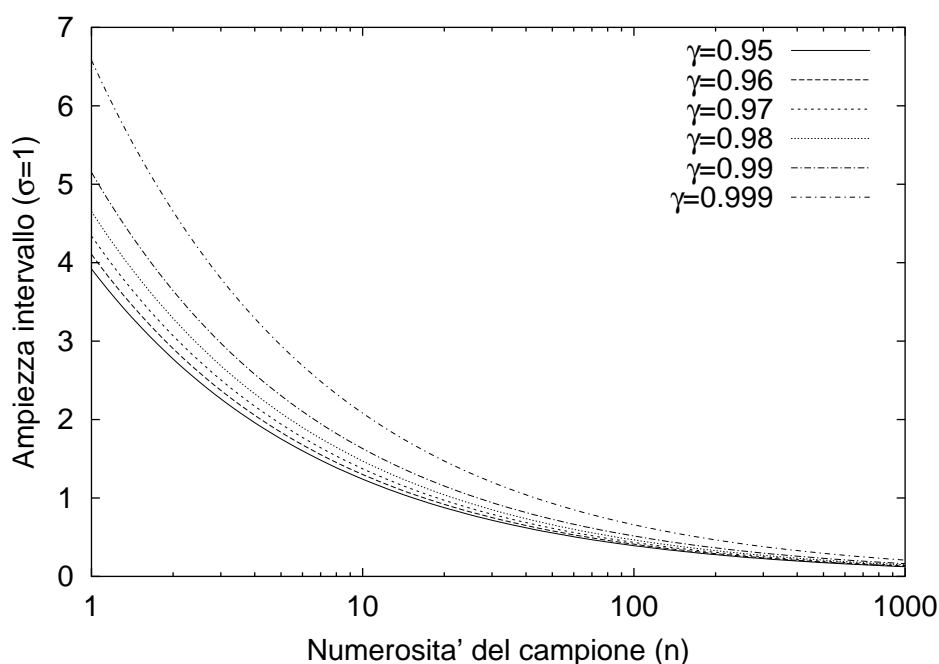


Figura 10.3: Ampiezza dell'intervallo di confidenza per la stima del valore atteso di una distribuzione normale (varianza nota). L'ampiezza è riportata in valore relativo alla deviazione standard, per diversi valori di confidenza ( $\gamma$ ) e numerosità del campione ( $n$ ).

Si sottolinea come esistano infiniti intervalli di confidenza a seconda della logica come sono scelti  $a$  e  $b$ . La logica adottata nell'esempio è quella di minimizzare la larghezza dell'intervallo, massimizzando la localizzazione del parametro incognito. Tuttavia esistono infinite coppie per le quali l'integrale in (10.2) è soddisfatta dato un certo valore di probabilità  $\gamma$ . In particolare, se  $a = -\infty$  si ottiene l'intervallo di confidenza

$$[-\infty, \bar{x} + \Phi^{-1}(\gamma)\sigma_x/\sqrt{n}] \quad (10.5)$$

Tale intervallo, detto unilaterale sinistro, minimizza lo scarto in eccesso rispetto al valore misurato. Intervalli unilaterali sinistri possono essere utili per stimare una grandezza come una sollecitazione meccanica, per la quale ha grande interesse stimare il valore medio massimo compatibile con le misure fatte.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per l'intervallo unilaterale destro.

### 10.2.1 Il metodo della quantità pivotale

**Definizione 10.2.1 (Quantità pivotale)** Sia  $x_1, \dots, x_n$  un campione casuale ottenuto da un esperimento. Se la statistica

$$\mathbf{q} = q(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n | \theta)$$

ha una distribuzione che non dipende da  $\theta$ , allora  $\mathbf{q}$  è una quantità pivotale per  $\theta$ .

Per generalizzare quanto detto in precedenza, si supponga che  $\mathbf{q}$  sia una quantità pivotale di cui è nota la distribuzione. Siano  $q_{\text{inf}}$ , e  $q_{\text{sup}}$  due valori di  $\mathbf{q}$  tali che la quantità pivotale sia contenuta all'interno dell'intervallo  $[q_{\text{inf}}, q_{\text{sup}}]$  con probabilità  $\gamma$ . Sia possibile, infine, dimostrare che, per ogni possibile realizzazione campionaria,  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , è soddisfatta la seguente relazione:

$$q(x_1, \dots, x_n; \theta) \in [q_{\text{inf}}, q_{\text{sup}}] \rightarrow \theta \in [\theta_{\text{inf}}(x_1, \dots, x_n), \theta_{\text{sup}}(x_1, \dots, x_n)] \quad (10.6)$$

in cui  $\theta_{\text{inf}}$  e  $\theta_{\text{sup}}$  sono opportune funzioni non dipendenti da  $\theta$ . Allora, l'intervallo  $[\theta_{\text{inf}}, \theta_{\text{sup}}]$  è un intervallo di confidenza avente confidenza pari a  $\gamma$  per  $\theta$  calcolabile quando siano noto il campione  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Si noti che (10.6) richiede che la disuguaglianza  $q_{\text{inf}} < q(x_1, \dots, x_n; \theta) < q_{\text{sup}}$  possa essere "trasformata" nella disuguaglianza  $\theta_{\text{inf}} < \theta < \theta_{\text{sup}}$ . Tale condizione è necessaria per rendere la quantità pivotale utile nella stima degli intervalli di confidenza. Si possono definire varie quantità pivotali, ma se non è possibile soddisfare (10.6) tali quantità sono inutili per il calcolo degli intervalli di confidenza.

Con riferimento al caso precedente, la VA normale normalizzata  $\mathbf{z}$  è la quantità pivotale per la stima di  $\eta$ . La distribuzione è  $N(0, 1)$ . Le funzioni  $\theta_{\text{inf}}$ ,  $\theta_{\text{sup}}$  sono:

$$\theta_{\text{inf}}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{n} \sum_i x_i \right) - 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

$$\theta_{\text{sup}}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{n} \sum_i x_i \right) + 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

Il verificarsi della condizione espressa in (10.6) è garantita dal fatto che  $\tau_{\text{inf}}(x_1, \dots, x_n)$  e  $\tau_{\text{sup}}(x_1, \dots, x_n)$  sono state ottenute trasformando in modo opportuno la disuguaglianza sulla quantità pivotale  $\mathbf{q}$

## 10.3 Campionamento da una distribuzione normale

### 10.3.1 Calcolo degli intervalli di confidenza per la media

Siano  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$   $n$  variabili aleatorie di distribuzione normale  $N(\eta, \sigma)$ . Si intende stimare l'intervallo di confidenza della stima del valore atteso della distribuzione nell'ipotesi che la varianza sia sconosciuta. Per fare ciò ci si deve avvalere dei seguenti risultati:

- (1) La variabile aleatoria  $\mathbf{z}$  definita come segue è normale di media 0 e deviazione standard  $1/\sqrt{n}$ :

$$\mathbf{z} = \frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i - \eta}{\sigma} \sim N(0, 1/\sqrt{n})$$

quindi, la VA ottenuta moltiplicando  $\mathbf{z}$  per  $\sqrt{n}$  è normale di media 0 e deviazione standard unitaria.

$$\sqrt{n}\mathbf{z} \sim N(0, 1)$$

- (2) La variabile  $\chi_{(n-1)}$  definita come:

$$\chi_{(n-1)} = \sum_i \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \quad (10.7)$$

segue una distribuzione di chi quadro con  $n - 1$  gradi di libertà (non dimostrata).

- (3) Le VA  $\mathbf{z}$  e  $\chi_{(n-1)}$  sono indipendenti (non dimostrato).

Sulla base dei punti (1)-(3) è possibile affermare che la VA  $\mathbf{q}$  definita come:

$$\mathbf{q} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \eta}{\hat{\sigma}} \quad (10.8)$$

segue la distribuzione  $t$  di Student con  $(n - 1)$  gradi di libertà. Tale distribuzione non dipende da  $\eta$  e  $\sigma$ , i parametri della distribuzione di  $\mathbf{x}$ , pertanto,  $\mathbf{q}$  è una quantità pivotale per il calcolo degli intervalli di confidenza del valore medio.

Per dimostrare ciò si riscriva (10.8) dividendo numeratore e denominatore per la deviazione standard  $\sigma$ :

$$\mathbf{q} = \frac{\sqrt{n}(\bar{\mathbf{x}} - \eta)/\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/\sigma^2}}$$

La stima della varianza è data dalla somma dei quadrati degli scarti diviso  $n - 1$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^2$$

che, sostituita nell'equazione precedente porge:

$$\mathbf{q} = \frac{\sqrt{n}(\bar{\mathbf{x}} - \eta)/\sigma_x}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i \left(\frac{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}}{\sigma_x}\right)^2}}$$

Si porti infine  $\sqrt{n-1}$  a numeratore ottenendo:

$$\mathbf{q} = \sqrt{n-1} \frac{\sqrt{n}(\bar{\mathbf{x}} - \eta)/\sigma}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}}{\sigma}\right)^2}} = \sqrt{n-1} \frac{z}{\chi_{(n-1)}}$$

Dove l'ultima uguaglianza può essere derivata in base ai punti (1) e (2). Confrontando quest'ultima espressione con (3.39) e tenendo presente che in base al punto (3) le due VA a numeratore e denominatore sono indipendenti si evince quanto affermato in precedenza, cioè che  $\mathbf{q}$  è una quantità pivotale per il calcolo degli intervalli di confidenza del valore medio.

Per utilizzare  $\mathbf{q}$  nella stima dell'intervallo di confidenza si debbono determinare due percentili della distribuzione di Student tali che la quantità pivotale sia contenuta all'interno dell'intervallo in una frazione  $\gamma\%$  degli esperimenti. Poiché la densità di probabilità della legge di Student è simmetrica rispetto allo 0, allora se:

$$q_{\text{inf}} : \Pr(\mathbf{q} < q_{\text{inf}}) = \beta$$

$$q_{\text{sup}} : \Pr(\mathbf{q} > q_{\text{sup}}) = \beta$$

la VA  $\mathbf{q}$  è contenuta all'interno di questo intervallo con probabilità  $1 - 2\beta = \gamma$ , quindi, assegnato  $\gamma$  risulta

$$\beta = \frac{1 - \gamma}{2}$$

Il percentile corrispondente a  $q_{\text{sup}}$  è quello a probabilità pari a  $1 - \beta$ . Poiché nelle tabelle sono, normalmente, contenuti i percentili superiori, per calcolare l'estremo superiore dell'intervallo di confidenza è necessario calcolare il percentile a probabilità  $1 - \beta$  della distribuzione di Student ad  $n - 1$  gradi di libertà:

$$q_{\text{sup}} = T_{\frac{1+\gamma}{2}, (n-1)} \quad (10.9)$$

l'estremo inferiore è:

$$q_{\text{inf}} = -q_{\text{sup}} \quad (10.10)$$

L'intervallo di confidenza bilaterale é:

$$\left[ \bar{x} - T_{\frac{1+\gamma}{2}, (n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \eta < \bar{x} + T_{\frac{1+\gamma}{2}, (n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right] \quad (10.11)$$

### 10.3.2 Varianza

Poiché:

$$\mathbf{q} = (n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \quad (10.12)$$

segue una distribuzione del tipo chi quadrato con  $n-1$  gradi di libertà, allora  $\mathbf{q}$  é una quantità pivotale per  $\sigma^2$ . Infatti, la distribuzione di  $\mathbf{q}$  dipende esclusivamente dal numero di gradi di libertà, cioè dalla numerosità del campione.

Sia pertanto  $X_{P,n}$  il percentile a probabilità  $P$  di una distribuzione di tipo chi quadrato ad  $n$  gradi di libertà. Evidentemente:

$$\Pr(X_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1} \leq \mathbf{q} \leq X_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}) = \gamma \quad (10.13)$$

quindi l'intervallo  $[X_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}, X_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}]$  può essere utilizzato per definire un intervallo di confidenza bilaterale per  $\sigma^2$ . Si noti che l'intervallo così definito é subottimo. Infatti, l'utilizzo di percentili a probabilità  $(1-\gamma)/2$  ed  $(1+\gamma)/2$  minimizza l'ampiezza dell'intervallo solo nel caso di distribuzioni simmetriche. La distribuzione di chi quadrato non é simmetrica, pertanto l'intervallo così determinato non é di lunghezza minima. Tuttavia, la procedura per determinare l'intervallo di lunghezza minima é complessa e, nella pratica, ci si riferisce sempre alla soluzione subottima.

Utilizzando la definizione di  $\mathbf{q}$  si ottiene:

$$\Pr\left(X_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1} \leq (n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq X_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}\right) = \gamma \quad (10.14)$$

da cui si ottiene l'intervallo di confidenza cercato:

$$\Pr\left(\frac{n-1}{X_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}} \hat{\sigma}^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n-1}{X_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}} \hat{\sigma}^2\right) = \gamma \quad (10.15)$$

Si noti un apparente paradosso: al crescere della numerosità del campione sembrerebbe (poiché  $n$  é a numeratore) che l'intervallo di confidenza diventi più ampio, contrariamente alla logica degli intervalli di confidenza. Questo paradosso deriva dal non considerare l'andamento dei percentili della distribuzione di chi quadrato. Infatti, gli andamenti di  $\frac{n-1}{X_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}}$  e  $\frac{n-1}{X_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}}$ , mostrati in figura 10.3.2, mostra che, in realtà, gli intervalli di confidenza si stringono al crescere di  $n$ , conformemente con la logica degli intervalli di confidenza.

### 10.3.3 Rapporto di varianze

In questo paragrafo si intende determinare l'intervallo di confidenza del rapporto di due varianze relative a due popolazioni normali. Le stime campionarie delle varianze si suppongono realizzate a partire da campioni di numerosità  $n_1$  ed  $n_2$  per la popolazione 1 e 2, rispettivamente.

La quantità pivotale definita in (10.12) é distribuita secondo una legge di chi quadrato ad  $n-1$  gradi di libertà. Per come é stata definita la legge di probabilità  $F$  di Fisher, allora risulta immediato provare che la variabile aleatoria  $\mathbf{q}$  definita a partire dalle varianze campionarie come:

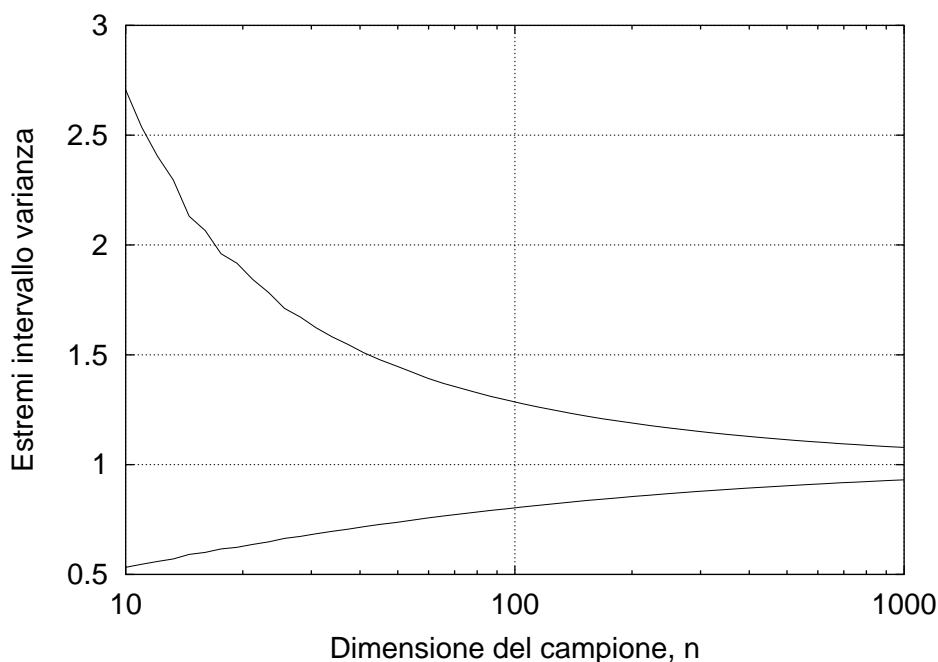


Figura 10.4: Andamento di  $\frac{n-1}{X_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}}$  e  $\frac{n-1}{X_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}}$  al variare di  $n$ , dimensione del campione.

$$q = \frac{\hat{\sigma}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{\sigma}_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\hat{\sigma}_1^2 \sigma_2^2}{\hat{\sigma}_2^2 \sigma_1^2} \quad (10.16)$$

segue la legge di  $F$  ad  $n_1 - 1$  ed  $n_2 - 1$  gradi di libertà, ed è una quantità pivotale per il rapporto di varianze.

Pertanto, se  $F_{P,(n,m)}$  è il percentile della distribuzione  $F$  a probabilità  $P$  ed  $n, m$  gradi di libertà, è:

$$\Pr(F_{\frac{1-\gamma}{2}, (n_1-1, n_2-1)} \leq q \leq F_{\frac{1+\gamma}{2}, (n_1-1, n_2-1)}) = \\ \Pr\left(F_{\frac{1-\gamma}{2}, (n_1-1, n_2-1)} \leq \frac{\hat{\sigma}_1^2 \sigma_2^2}{\hat{\sigma}_2^2 \sigma_1^2} \leq F_{\frac{1+\gamma}{2}, (n_1-1, n_2-1)}\right) = \gamma$$

e da quest'ultima l'intervallo di confidenza cercato:

$$\Pr\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}}{F_{\frac{1+\gamma}{2}, (n_1-1, n_2-1)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}}{F_{\frac{1-\gamma}{2}, (n_1-1, n_2-1)}}\right) = \gamma \quad (10.17)$$

## 10.4 Il metodo statistico

Un altro metodo per ottenere intervalli di confidenza è il metodo statistico. Per applicare il metodo statistico è necessario conoscere la densità di probabilità dello stimatore (che sarà indicato come una statistica  $t$  con il valore sperimentale  $t$  uguale alla stima del parametro, cioè  $t = \hat{\theta}$ ) per ogni valore del parametro incognito, cioè  $f(t | \theta)$ . Si supponga ora che siano calcolabili (eventualmente in modo numerico) le funzioni  $h_1(\theta)$  ed  $h_2(\theta)$  che godano delle proprietà seguenti:

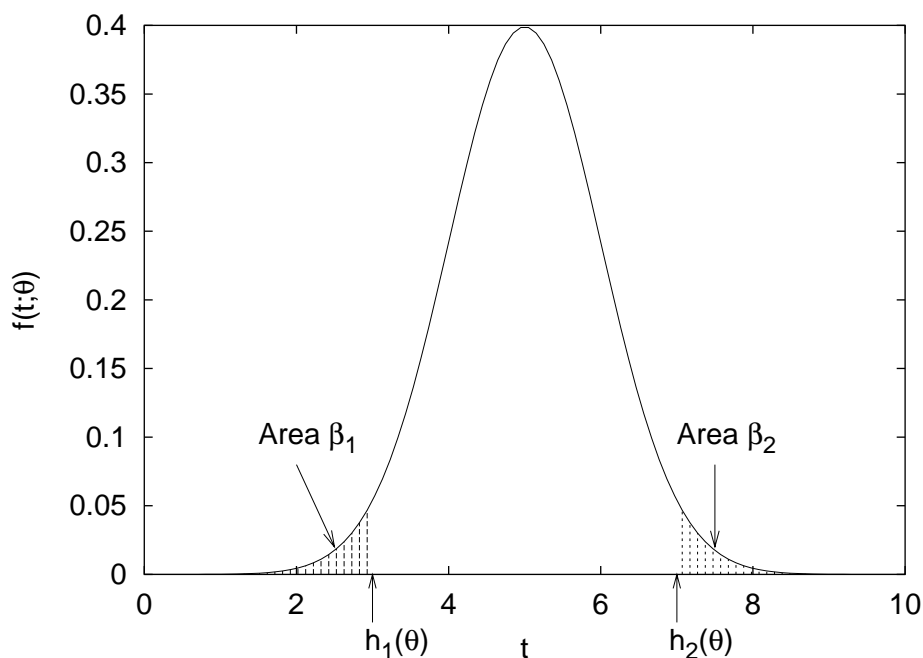


Figura 10.5: Significato delle funzioni  $h_1(\theta)$  ed  $h_2(\theta)$  utilizzate nel metodo statistico.

$$\int_{-\infty}^{h_1(\theta)} f(t | \theta) dt = \beta_1 \quad (10.18)$$

$$\int_{h_2(\theta)}^{\infty} f(t | \theta) dt = \beta_2 \quad (10.19)$$

con il vincolo  $\beta_1 + \beta_2 < 1$ . Il significato delle due funzioni è mostrato nella figura 10.5:  $h_1(\theta)$  e  $h_2(\theta)$  sono i percentili a probabilità  $\beta_1$  ed  $1 - \beta_2$  della distribuzione di probabilità di  $\mathbf{t}$ .

Si traccino ora le due funzioni  $h_1(\theta)$  ed  $h_2(\theta)$  in funzione di  $\theta$ . Si assuma, per semplicità, che le due funzioni siano monotone crescenti, come mostrato in 10.6. Con  $t = \hat{\theta}$  in 10.6 si indica il valore ottenuto per lo stimatore sulla base dei dati misurati, cioè  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Siano inoltre:

$$\theta_{\text{inf}} = h_2^{-1}(t) \quad (10.20)$$

$$\theta_{\text{sup}} = h_1^{-1}(t) \quad (10.21)$$

Si intende dimostrare che  $\theta_{\text{inf}}$  e  $\theta_{\text{sup}}$  sono, effettivamente, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di confidenza di  $\theta$  avente confidenza  $\gamma$  pari ad  $1 - \beta_1 - \beta_2$ .

Per fare ciò è necessario enfatizzare che il valore osservato dello stimatore è la realizzazione di una variabile aleatoria  $\mathbf{t}$  e che l'intervallo

$$U(\mathbf{t}) = [h_2^{-1}(\mathbf{t}), h_1^{-1}(\mathbf{t})]$$

è un intervallo aleatorio, cioè una famiglia di intervalli con estremi variabili in modo aleatorio. Se tale intervallo è un intervallo di confidenza, allora, per definizione di intervallo di confidenza, nel  $\gamma\%$  dei casi di infinite prove l'intervallo calcolato deve contenere il valore vero del parametro  $\theta_0$ . La figura 10.7 mostra che solo per

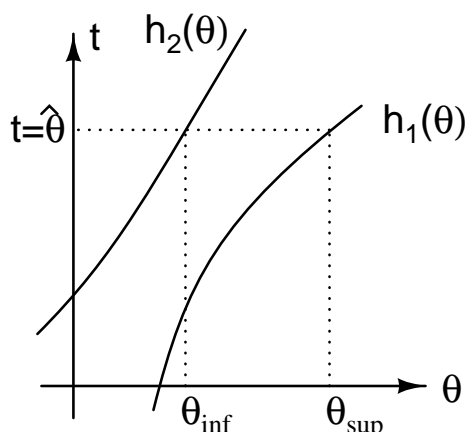


Figura 10.6: Calcolo dell'intervallo di confidenza mediante il metodo statistico.

$$t > t_2 = h_2(\theta_0)$$

$$t < t_1 = h_1(\theta_0)$$

gli intervalli calcolati non comprendono  $\theta_0$ . Tuttavia, per come sono state definite le funzioni  $h_1$  ed  $h_2$  ciò accade esclusivamente nel  $(\beta_1 + \beta_2)\%$  dei casi. Quindi, nel rimanente  $\gamma\%$  dei casi gli intervalli calcolati comprendono  $\theta_0$ . Cioè il metodo statistico porta a scrivere, effettivamente, un intervallo di confidenza per  $\theta_0$

## 10.5 Intervallo di confidenza per la probabilità

Per calcolare l'intervallo di confidenza per la probabilità di un evento è necessario utilizzare l'algoritmo di Clopper e Pearson. Tale algoritmo non è altro che l'applicazione per la stima intervallare della probabilità del metodo statistico, presentato nella sezione precedente.

La statistica, in questo caso, è il numero di volte,  $\mathbf{k}$ , in cui si verifica l'evento  $\mathcal{E}$  in  $n$  esperimenti ripetuti. Il parametro  $\theta$  in questione è il valore  $p$  della probabilità di  $\mathcal{E}$ .

Si ricorda che, fissato un numero  $k$  arbitrario e la probabilità  $p$  dell'evento  $\mathcal{E}$ , la probabilità di osservare  $k$  volte l'evento  $\mathcal{E}$  in  $n$  esperimenti è:

$$\Pr(\mathbf{k} = k \text{ (} n \text{ lanci)}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (10.22)$$

Dunque, fissato un valore  $p$  della probabilità di  $\mathcal{E}$ , il percentile a probabilità  $P$  della distribuzione è quel numero  $k$  per cui si verifica che:

$$\Pr(\mathbf{k} \leq k \text{ (} n \text{ lanci)}) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P \quad (10.23)$$

Quindi, ricordando la definizione delle funzioni  $h_1(\theta)$  e  $h_2(\theta)$  utilizzate nel metodo statistico e tenendo conto che, in questo caso  $\theta = p$ , si conclude che  $h_1(p)$  è quell'intero che, per un prefissato valore di probabilità  $p$ , soddisfa la condizione:



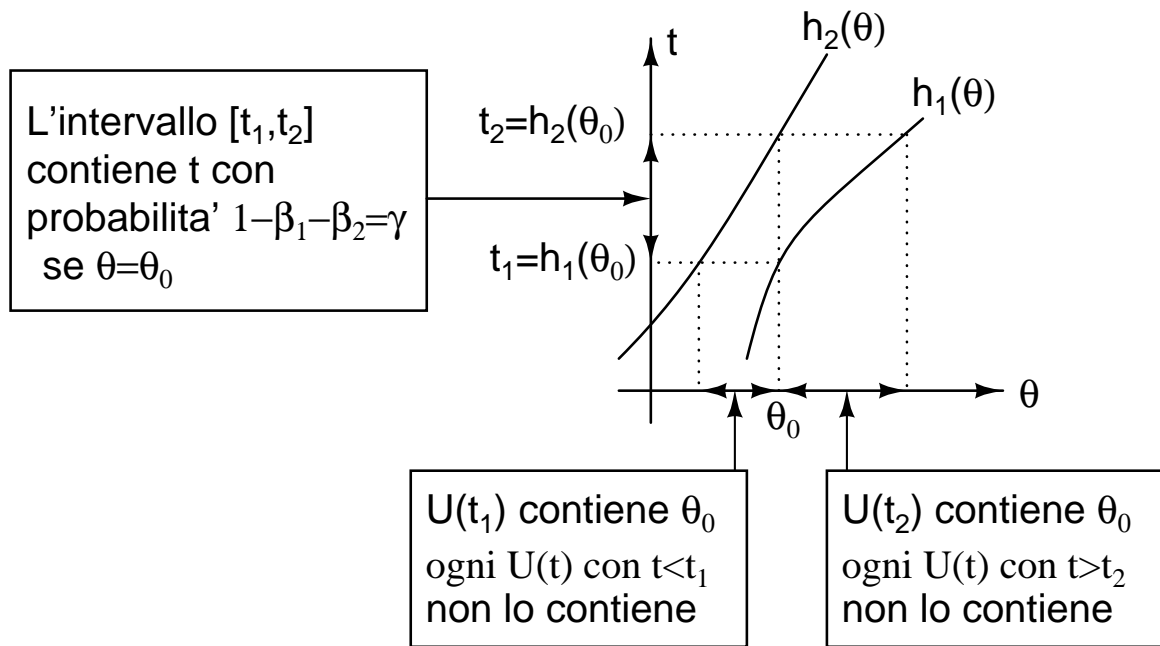


Figura 10.7: Dimostrazione del calcolo dell'intervallo di confidenza mediante il metodo statistico.

$$\sum_{i=0}^{h_1(p)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \beta_1 \tag{10.24}$$

e, simmetricamente:

$$\sum_{i=h_2(p)}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \beta_2 \tag{10.25}$$

Poiché nelle applicazioni pratiche  $p$  non è noto ma è noto il valore  $k$  assunto dalla VA  $k$  le equazioni precedenti vanno risolte cercando  $p_l$  e  $p_u$  tali che:

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p_u^i (1-p_u)^{n-i} \leq \beta_1 \tag{10.26}$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p_l^i (1-p_l)^{n-i} \leq \beta_2 \tag{10.27}$$

L'intervallo  $[p_l, p_u]$  costituisce l'intervallo di confidenza cercato. Il procedimento descritto è mostrato graficamente in figura 10.8. La figura mostra il calcolo dell'intervallo di confidenza (pari a  $[0.45, 0.83]$ ) della probabilità di un evento verificatosi 13 volte in 20 esperimenti successivi, evidenziando la natura "a scalinata" delle funzioni  $h_1(p)$  e  $h_2(p)$ . Tale andamento non deve sorprendere, in quanto  $k$  non può che assumere valori discreti.

Per calcolare gli intervalli di confidenza della probabilità sono possibili tre strade. La prima è quella percorsa per tracciare la figura 10.8. Tale strada richiede un calcolatore dotato di una routine in grado di invertire (10.23), ricavando  $p$  per  $k$ ,  $n$  e  $P$  fissati. Utilizzando il calcolatore si tracciano, numericamente, le due funzioni a gradinata, quindi si determina graficamente l'intervallo di confidenza. La seconda strada

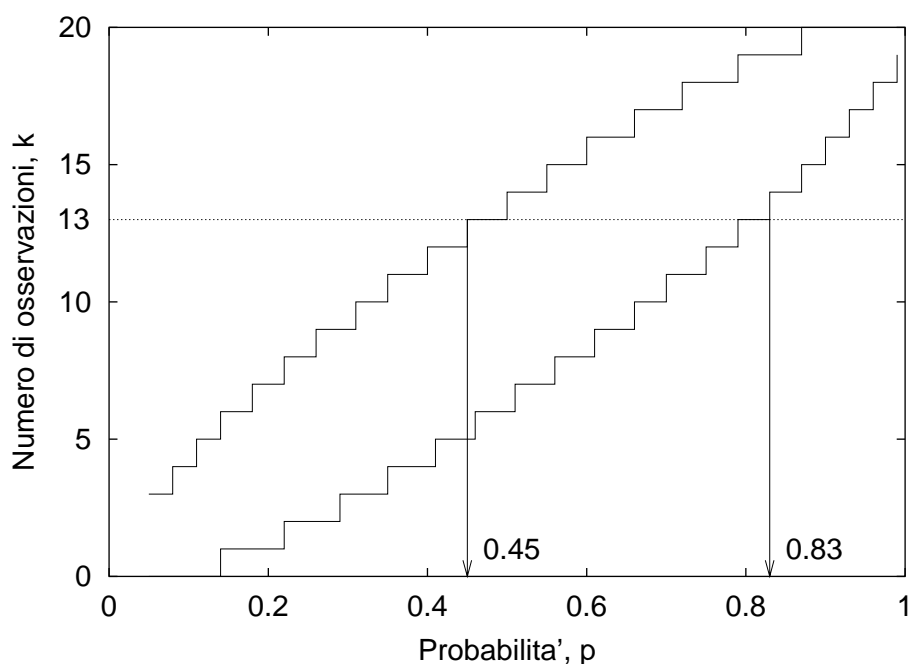


Figura 10.8: Intervallo di confidenza della probabilità di un evento verificatosi 13 volte in 20 esperimenti successivi ( $\hat{p} = 13/20 = 0.65$ ).

è quella di utilizzare carte pretracciate. La terza, infine, consiste nell'utilizzare l'approssimazione normale per la distribuzione della probabilità. Quest'ultima strada è descritta nella sezione successiva.

Quando  $k = 0$  o  $k = n$  si utilizzano le seguenti coppie di equazioni:

$$\hat{p}_l = 0 \quad (10.28)$$

$$\hat{p}_u = 1 - \sqrt[n]{\beta_1} \quad (10.29)$$

per  $k = 0$ , altrimenti, per  $k = n$  si utilizza:

$$\hat{p}_l = \sqrt[n]{\beta_2} \quad (10.30)$$

$$\hat{p}_u = 1 \quad (10.31)$$

### 10.5.1 Calcolo mediante l'approssimazione normale

Il calcolo mediante approssimazione normale viene praticato quando il minimo fra  $n\hat{p}$  e  $n(1-\hat{p})$  (essendo  $\hat{p}$  la stima puntuale della probabilità) è maggiore di 5. Ciò accade, generalmente, per campioni di numerosità  $n$  abbastanza elevata.

Per utilizzare il metodo si costruisce la VA  $\mathbf{x}$  che è pari ad 1 quando si verifica l'evento, pari a 0 se non si verifica l'evento considerato. È agevole verificare che:

$$E[\mathbf{x}] = p$$

$$E[x^2] = p$$

quindi

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

dove  $q = 1 - p$ . La distribuzione della VA  $\bar{x}$ , che coincide con la stima puntuale della probabilità, può essere approssimata, utilizzando l'approssimazione di deMoivre Laplace, ad una distribuzione normale. Pertanto, poiché  $\bar{x}$  ha valore atteso  $p$  e varianza pari a  $pq/n$  la statistica:

$$q = \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sqrt{n} \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{10.32}$$

è una quantità pivotale per  $p$ . Pertanto, se  $\gamma$  è la confidenza richiesta, e  $Z_{(1+\gamma)/2}$  è il percentile alla probabilità  $(1 + \gamma)/2$  della distribuzione normale normalizzata, allora l'intervallo di confidenza per la probabilità può essere determinato ricavando  $p$  dall'equazione (10.32). La soluzione è:

$$\hat{p}_{l,u} = \frac{(k + 0.5Z_{(1+\gamma)/2}^2) \pm Z_{(1+\gamma)/2} \sqrt{k(1 - k/n) + Z_{(1+\gamma)/2}^2/4}}{n + Z_{(1+\gamma)/2}^2} \tag{10.33}$$

con l'intervallo di confidenza costruito come:

$$\hat{p}_l \leq p \leq \hat{p}_u \tag{10.34}$$

Per  $n > 100$  è possibile confondere la stima della varianza con la varianza stessa, determinando una espressione decisamente più semplice:

$$\hat{p} - Z_{(1+\gamma)/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{(1+\gamma)/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \tag{10.35}$$

## 10.6 Intervallo di confidenza per $\lambda$ di una distribuzione esponenziale

### Durata del test prefissata

Sia  $T$  la durata prefissata del test. Il verificarsi di  $k$  eventi nell'intervallo  $[0, T]$  ha una probabilità che può essere calcolata utilizzando la seguente equazione (legge di probabilità di Poisson, identità non dimostrata):

$$\Pr(\mathbf{k} = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp(-\lambda T) \tag{10.36}$$

Il problema della determinazione dell'intervallo di confidenza per  $\lambda$  è praticamente identico alla determinazione dell'intervallo di confidenza per la probabilità. In pratica, si tratta di risolvere la seguente coppie di equazioni:

$$\sum_{i=0}^k \frac{(\hat{\lambda}_u T)^i}{i!} \exp(-\hat{\lambda}_u T) = \beta_1 \tag{10.37}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\hat{\lambda}_l T)^i}{i!} \exp(-\hat{\lambda}_l T) = \beta_2 \tag{10.38}$$

se  $k > 0$  o, alternativamente:

$$\hat{\lambda}_u = \frac{\log(1/\beta_1)}{T} \tag{10.39}$$

$$\hat{\lambda}_l = 0 \tag{10.40}$$

se  $k = 0$ . Queste equazioni forniscono gli intervalli di confidenza per  $\lambda$  con una probabilità non inferiore a  $\gamma = 1 - \beta_1 - \beta_2$ . Tuttavia, poiché almeno una delle sommatorie si estende fino all'infinito, si utilizzano le seguenti equazioni:

$$\hat{\lambda}_u = \frac{X_{(1-\beta_1),2(k+1)}}{2T} = \hat{\lambda} \frac{X_{(1-\beta_1),2(k+1)}}{2k} \tag{10.41}$$

$$\hat{\lambda}_l = \frac{X_{(\beta_2),(2k)}}{2T} = \hat{\lambda} \frac{X_{\beta_2,2k}}{2k} \tag{10.42}$$

dove  $X_{(\nu),(P)}$  è il percentile a probabilità  $P$  della distribuzione di chi quadrato avente  $\nu$  gradi di libertà. Le espressioni precedenti sono ricavate sfruttando l'identità:

$$\sum_{i=0}^k \frac{m^i}{i!} \exp(-m) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k!2^{k+1}} \int_0^{2m} x^k \exp(-x/2) dx \right) \tag{10.43}$$

dove il termine entro parentesi coincide con una distribuzione di tipo chi quadrato avente  $\nu = 2k$  gradi di libertà.

Le precedenti espressioni, valide per il parametro  $\lambda$  di una distribuzione esponenziale possono essere applicate per determinare l'intervallo di confidenza di  $1/\lambda$ . In teoria dell'affidabilità tale parametro è, generalmente, un tempo medio fra i guasti (o fra le riparazioni), pertanto:

$$MTTF_l = \frac{2T}{X_{(1-\beta_1),2(k+1)}} \tag{10.44}$$

$$MTTF_u = \frac{2T}{X_{(\beta_2),(2k)}} \tag{10.45}$$

### Numero di guasti prefissato

Per calcolare l'intervallo di confidenza si osservi che se  $t_i$  sono i tempi di guasto dei singoli dispositivi,  $t$  un tempo cumulato di prova prefissato e  $k$  in numero dei guasti in  $[0, t]$ , allora è:

$$\Pr(t_1 + \dots + t_n \leq t) = \Pr(k > n) = 1 - \Pr(k \leq n) \tag{10.46}$$

Utilizzando l'espressione di  $\Pr(k \leq n)$  ottenuta dalla legge di Poisson e l'identità (10.43) è possibile scrivere:

$$1 - \Pr(k \leq n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \exp(-\lambda t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\lambda t} x^{n-1} e^{-x} dx \tag{10.47}$$

Generalizzando:

$$\Pr(a \leq t_1 + \dots + t_n \leq b) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\lambda a}^{\lambda b} x^{n-1} e^{-x} dx \tag{10.48}$$

Si scelgano ora  $a$  e  $b$  nel modo seguente:

$$a = \frac{n(1 - \epsilon_2)}{\lambda} \tag{10.49}$$

$$b = \frac{n(1 + \epsilon_1)}{\lambda} \tag{10.50}$$

sostituendo in (10.48) si ottiene:

$$\Pr\left(\frac{1 - \epsilon_2}{\lambda} \leq \frac{t_1 + \dots + t_n}{n} \leq \frac{1 + \epsilon_1}{\lambda}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{n(1-\epsilon_2)}^{n(1+\epsilon_1)} x^{n-1} e^{-x} dx \tag{10.51}$$

Poiché la stima di  $\lambda$  é data dal rapporto fra il numero di prove ed il tempo cumulato di prova:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_1 + \dots + t_n} \tag{10.52}$$

si evince che gli estremi dell'intervallo in (10.51), cioè:

$$\hat{\lambda}_l = (1 - \epsilon_2)\hat{\lambda} \tag{10.53}$$

$$\hat{\lambda}_u = (1 + \epsilon_1)\hat{\lambda} \tag{10.54}$$

possono essere utilizzati come estremi dell'intervallo di confidenza. Per fare ciò é sufficiente che la probabilità in (10.51) valga  $1 - \beta_1 - \beta_2$ . Dunque, imponendo che

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{n(1+\epsilon_1)}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \beta_1 \tag{10.55}$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{n(1-\epsilon_2)} x^{n-1} e^{-x} dx = \beta_2 \tag{10.56}$$

si ottengono gli estremi dell'intervallo di confidenza:

$$\epsilon_1 = \frac{X_{1-\beta_1, 2n}}{2n} - 1 \tag{10.57}$$

$$\epsilon_2 = 1 - \frac{X_{\beta_2, 2n}}{2n} \tag{10.58}$$

e:

$$\hat{\lambda}_l = \frac{X_{\beta_2, 2n}}{2n} \hat{\lambda} \tag{10.59}$$

$$\hat{\lambda}_u = \frac{X_{1-\beta_1, 2n}}{2n} \hat{\lambda} \tag{10.60}$$