Appunti del corso di
Affidabilitá e Diagnostica dei Sistemi Elettrici

Andrea Cavallini, Gian Carlo Montanari
DIE-Universitá di Bologna
viale Risorgimento 2, 40136 Bologna
andrea.cavallini@mail.ing.unibo.it
http://limat.ing.unibo.it

A.A 1999/2000

Indice

Capitolo 10

Stime per intervalli

10.1 Introduzione

La stima puntuale di un parametro non fornisce una indicazione relativa all'incertezza della stima, in quanto il valore vero del parametro puó differire anche in modo significativo dal valore stimato. Ció é tanto piú vero tanto piú la dimensione del campione é ridotta. Oltre al valore stimato é quindi opportuno fornire anche un intervallo, che comprende il valore stimato, all'interno del quale il valore vero del parametro é contenuto con una probabilitá γ, nota come confidenza. L'intervallo cosí fornito é noto come intervallo di confidenza. Gli estremi dell'intervallo debbono essere considerati come variabili aleatorie, infatti dipendono dal campione.

In generale, l'intervallo di confidenza di un parametro é tanto piú piccolo quanto maggiore é la dimensione del campione e quanto piú é alta l'efficienza dello stimatore impiegato. Intervalli di confidenza di ampiezza limitata (relativamente alla stima puntuale del parametro) indicano che la stima puntuale é precisa.

10.2 Quantitá pivotali

Si consideri il problema della stima del valore atteso di una VA $\boldsymbol{x}$. La stima puntuale, come é noto, é data dalla media aritmetica delle n osservazioni disponibili nel campione $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Come sempre é fondamentale osservare che la media su n osservazioni non puó essere nota a priori e, pertanto, deve essere considerata come una VA:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$$

Per determinare l'intervallo di confidenza della media, si procede, innanzitutto, determinando la legge di probabilitá di $\overline{\boldsymbol{x}}$. Per il teorema del limite centrale, il valore medio di $\boldsymbol{x}$, essendo la somma di n VA indipendenti $\boldsymbol{x}_i$, segue, per n sufficientemente alto, una legge di probabilitá normale. Ció é vero a prescindere dalla distribuzione di $\boldsymbol{x}$. Il valore medio ha valore atteso e deviazione standard facilmente deducibili da quelli della VA $\boldsymbol{x}$. Infatti, il valore atteso della media é η_x, la deviazione standard é $\sigma_x/\sqrt{n}$. Pertanto é

$$\overline{\boldsymbol{x}} \sim N(\eta_x, \sigma_x/\sqrt{n})$$

Sia ora $\boldsymbol{z}$ una VA definita a partire da $\overline{\boldsymbol{x}}$: come:

$$\boldsymbol{z} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \eta_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \eta_x}{\sigma_x}$$

tale VA ha distribuzione $N(0,1)$ (cioé normale normalizzata), indipendente da η_x e σ_x. Una VA $\boldsymbol{z}$, derivata da una statistica $T(\mathcal{X})$, che gode della proprietá che la distribuzione di $\boldsymbol{z}$ non dipende dai parametri della distribuzione di $\boldsymbol{x}$ viene indicata come quantitá pivotale. Detta $\phi(z)$ la densitá di probabilitá di una VA normale normalizzata, é possibile calcolare la probabilitá che $\boldsymbol{z}$ sia contenuta in un intervallo di estremi a e b:

$$\Pr(\boldsymbol{z} \in [a,b]) = \int_a^b \phi(z)\mathrm{d}z$$

In particolare, per un intervallo centrato attorno allo 0, é:

$$\Pr(\boldsymbol{z} \in [-a,a]) = \int_{-a}^a \phi(z)\mathrm{d}z = 2\Phi(a) - 1$$

Ponendo $a = 1.96$, risulta:

$$\Pr(\boldsymbol{z} \in [-1.96, 1.96]) = 2\Phi(1.96) - 1 = 0.95$$

cioé:

$$\Pr\left(-1.96 \leq \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \eta_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \leq 1.96 \right) = 0.95 \tag{10.1}$$

per le proprietá della trasformazione lineare di VA ($\boldsymbol{z}$ é derivata dalla media di $\boldsymbol{x}$ mediante una trasformazione lineare) é possibile scrivere l'equazione precedente come:

$$\Pr\left(\overline{\boldsymbol{x}} - 1.96\sigma_x/\sqrt{n} \leq \eta_x \leq \overline{\boldsymbol{x}} + 1.96\sigma_x/\sqrt{n} \right) = 0.95 \tag{10.2}$$

L'equazione (10.2), deve essere interpretata nel modo seguente: se si ripete infinite volte l'esperimento di estrazione di n campioni e, ad ogni esperimento, si calcola la media, $\overline{x}$, e l'intervallo di estremi $\overline{x} - 1.96\sigma_x/\sqrt{n}$ e $\overline{x} + 1.96\sigma_x/\sqrt{n}$ allora, nel 95% dei casi, η_x é contenuto nell'intervallo calcolato, cioé:

$$\Pr\left(\eta_x - 1.96\sigma_x/\sqrt{n} \leq \overline{\boldsymbol{x}} \leq \eta_x + 1.96\sigma_x/\sqrt{n} \right) = 0.95 \tag{10.3}$$

Il comportamento dell'intervallo di confidenza cosí calcolato é illustrato, schematicamente, in 10.1. Si noti che gli estremi dell'intervallo di confidenza sono variabili aleatorie che, nel caso mostrato, dipendono dal valore medio, $\overline{x}$, delle n realizzazioni della variabile aleatoria considerata.

L'equazione (10.2) permette d calcolare gli estremi dell'intervallo di confidenza per il valore atteso di una VA. Il valore atteso sará infatti compreso con una confidenza pari al 95% nell'intervallo di estremi $\overline{x} - 1.96\sigma/\sqrt{n}$ e $\overline{x} + 1.96\sigma/\sqrt{n}$. E' importante osservare che, all'aumentare del numero delle osservazioni, l'intervallo di confidenza sará via via piú concentrato attorno al valore atteso η_x. Al contrario, aumentando la confidenza, l'intervallo si allarga. Ad esempio, per una confidenza del 98% l'intervallo di confidenza ha estremi $\overline{x} - 2.326\sigma/\sqrt{n}$ e $\overline{x} + 2.326\sigma/\sqrt{n}$. Il nuovo coefficiente moltiplicativo, pari 2.326, si determina come:

$$k = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \tag{10.4}$$

con $\gamma = 0.98$. L'ampiezza dell'intervallo di confidenza per n che varia da 1 a 1000 per diversi valori di γ é mostrata in figura 10.3

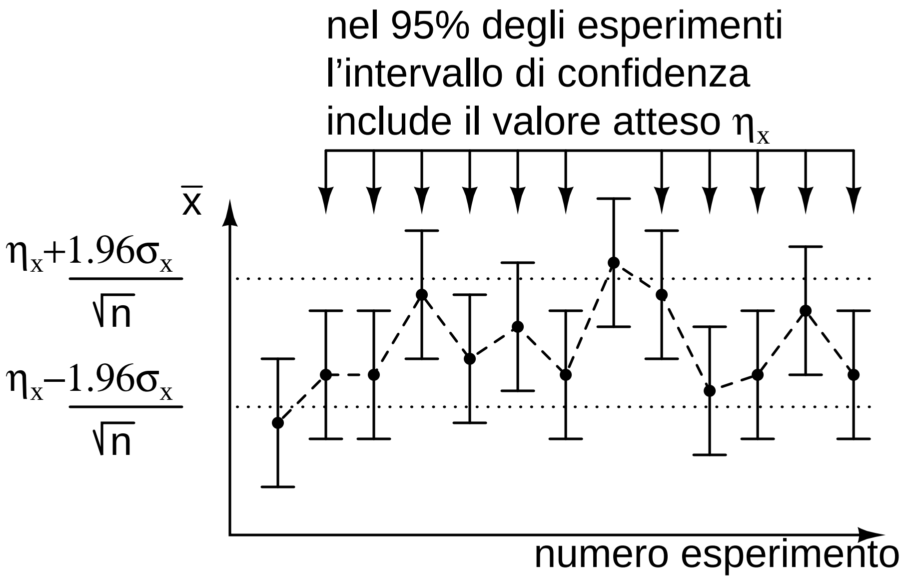

Figura 10.1: Comportamento dell'intervallo di confidenza bilaterale. In una frazione γ degli esperimenti l'intervallo comprende il vero valore del parametro (in questo caso η_x).

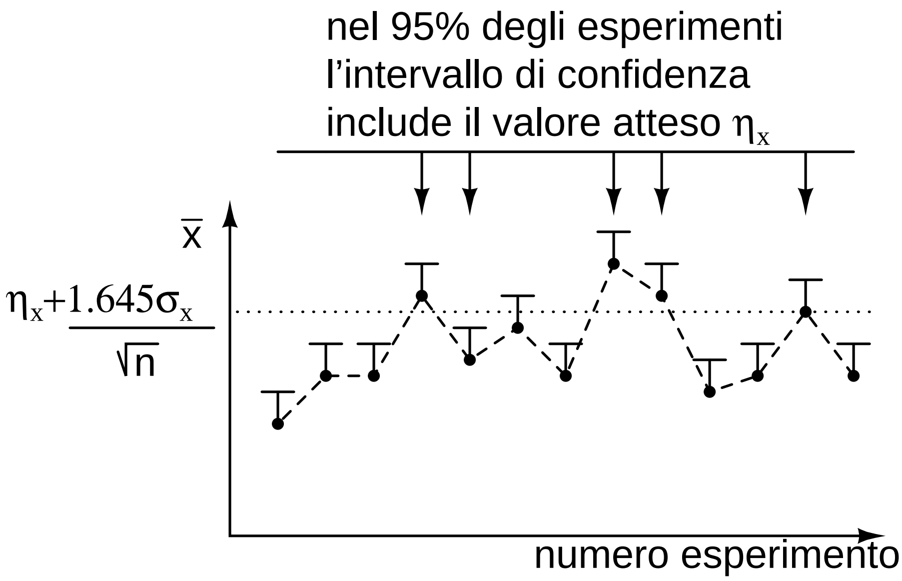

Figura 10.2: Comportamento dell'intervallo di confidenza unilaterale sinistro. In una frazione γ degli esperimenti l'intervallo (che si estende fino a $-\infty$) comprende il vero valore del parametro (in questo caso η_x).

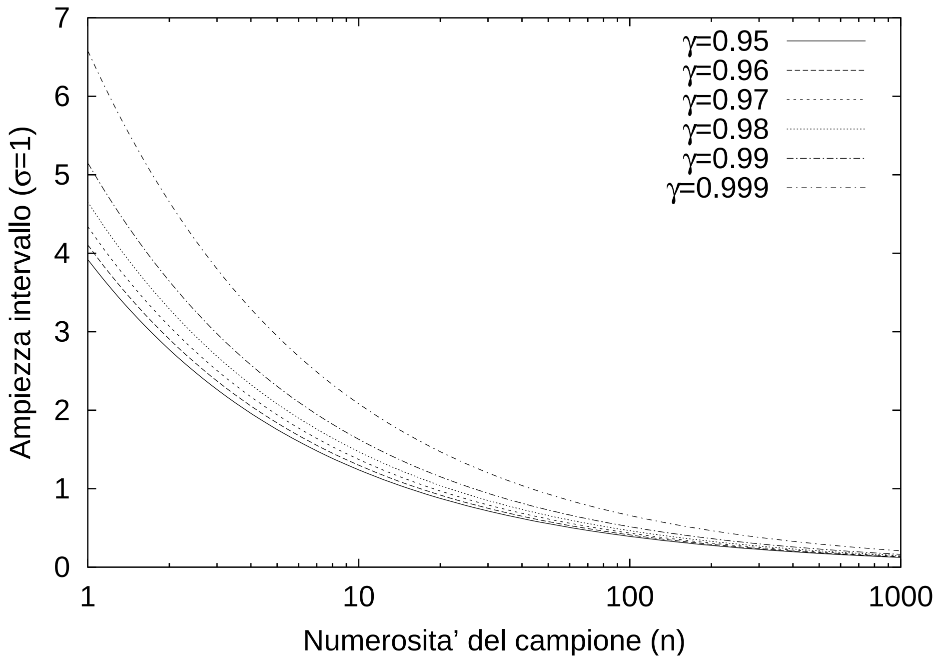

Figura 10.3: Ampiezza dell'intervallo di confidenza per la stima del valore atteso di una distribuzione normale (varianza nota). L'ampiezza é riportata in valore relativo alla deviazione standard, per diversi valori di confidenza (γ) e numerositá del campione (n).

Si sottolinea come esistano infiniti intervalli di confidenza a seconda della logica come sono scelti a e b. La logica adottata nell'esempio é quella di minimizzare la larghezza dell'intervallo, massimizzando la localizzazione del parametro incognito. Tuttavia esistono infinite coppie per le quali l'integrale in (10.2) é soddisfatta dato un certo valore di probabilitá γ. In particolare, se $a = -\infty$ si ottiene l'intervallo di confidenza

$$\big[-\infty, \overline{x} + \Phi^{-1}(\gamma)\sigma_x/\sqrt{n}\big] \tag{10.5}$$

Tale intervallo, detto unilaterale sinistro, minimizza lo scarto in eccesso rispetto al valore misurato. Intervalli unilaterali sinistri possono essere utili per stimare una grandezza come una sollecitazione meccanica, per la quale ha grande interesse stimare il valore medio massimo compatibile con le misure fatte.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per l'intervallo unilaterale destro.

10.2.1 Il metodo della quantitá pivotale

Definizione 10.2.1 (Quantitá pivotale) *Sia $x_1, \dots x_n$ un campione casuale ottenuto da un esperimento. Se la statistica*

$$\boldsymbol{q} = q(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \mid \theta)$$

ha una distribuzione che non dipende da θ, allora $\boldsymbol{q}$ é una quantitá pivotale per θ.

Per generalizzare quanto detto in precedenza, si supponga che $\boldsymbol{q}$ sia una quantitá pivotale di cui é nota la distribuzione. Siano $q_{\inf}$, e $q_{\sup}$ due valori di $\boldsymbol{q}$ tali che la quantitá pivotale sia contenuta all'interno dell'intervallo $[q_{\inf}, q_{\sup}]$ con probabilitá γ. Sia possibile, infine, dimostrare che, per ogni possibile realizzazione campionaria, $\{x_1, \dots x_n\}$, é soddisfatta la seguente relazione:

$$q(x_1,\dots x_n;\theta)\in[q_{\inf},q_{\sup}]\rightarrow\theta\in[\theta_{\inf}(x_1,\dots x_n),\theta_{\sup}(x_1,\dots x_n)] \tag{10.6}$$

in cui $\theta_{\inf}$ e $\theta \sup$ sono opportune funzioni non dipendenti da θ. Allora, l'intervallo $[\theta_{\inf},\theta_{\sup}]$ é un intervallo di confidenza avente confidenza pari a γ per θ calcolabile quando siano noto il campione $\{x_1,\dots x_n\}$. Si noti che (10.6) richiede che la disuguaglianza $q_{\inf}<q(x_1,\dots x_n;\theta)<q_{\sup}$ possa essere "trasformata" nella disuguaglianza $\theta_{\inf}<\theta<\theta_{\sup}$. Tale condizione é necessaria per rendere la quantitá pivotale utile nella stima degli intervalli di confidenza. Si possono definire varie quantitá pivotali, ma se non é possibile soddisfare (10.6) tali quantitá sono inutili per il calcolo degli intervalli di confidenza.

Con riferimento al caso precedente, la VA normale normalizzata $\boldsymbol{z}$ é la quantitá pivotale per la stima di η. La distribuzione é $N(0,1)$. Le funzioni $\theta_{\inf}$, $\theta_{\sup}$ sono:

$$\theta_{\inf}(x_1,\dots x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)-1.96\sigma/\sqrt{n}$$

$$\theta_{\sup}(x_1,\dots x_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)+1.96\sigma/\sqrt{n}$$

Il verificarsi della condizione espressa in (10.6) é garantita dal fatto che $\tau_{\inf}(x_1,\dots x_n)$ e $\tau_{\inf}(x_1,\dots x_n)$ sono state ottenute trasformando in modo opportuno la disuguaglianza sulla quantitá pivotale $\boldsymbol{q}$

10.3 Campionamento da una distribuzione normale

10.3.1 Calcolo degli intervalli di confidenza per la media

Siano $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n$ n variabili aleatorie di distribuzione normale $N(\eta,\sigma)$. Si intende stimare l'intervallo di confidenza della stima del valore atteso della distribuzione nell'ipotesi che la varianza sia sconosciuta. Per fare ció ci si deve avvalere dei seguenti risultati:

(1) La variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$ definita come segue é normale di media 0 e deviazione standard $1/\sqrt{n}$:

$$\boldsymbol{z}=\frac{1}{n}\sum_i\frac{x_i-\eta}{\sigma}\sim N(0,1/\sqrt{n})$$

quindi, la VA ottenuta moltiplicando $\boldsymbol{z}$ per $\sqrt{n}$ é normale di media 0 e deviazione standard unitaria.

$$\sqrt{n}\boldsymbol{z}\sim N(0,1)$$

(2) La variabile $\boldsymbol{\chi}_{(n-1)}$ definita come:

$$\boldsymbol{\chi}_{(n-1)}=\sum_i\left(\frac{\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}}{\sigma}\right)^2 \tag{10.7}$$

segue una distribuzione di chi quadro con $n-1$ gradi di libertá (non dimostrata).

(3) Le VA $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{\chi}_{(n-1)}$ sono indipendenti (non dimostrato).

Sulla base dei punti (1)-(3) é possibile affermare che la VA $\boldsymbol{q}$ definita come:

$$\boldsymbol{q}=\sqrt{n}\frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\eta}{\hat{\sigma}} \tag{10.8}$$

segue la distribuzione t di Student con $(n-1)$ gradi di libertá. Tale distribuzione non dipende da η e σ, i parametri della distribuzione di $\boldsymbol{x}$, pertanto, $\boldsymbol{q}$ é una quantitá pivotale per il calcolo degli intervalli di confidenza del valore medio.

Per dimostrare ció si riscriva (10.8) dividendo numeratore e denominatore per la deviazione standard σ:

$$\boldsymbol{q} = \frac{\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{x}} - \eta)/\sigma}{\sqrt{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2/\sigma^2}}$$

La stima della varianza é data dalla somma dei quadrati degli scarti diviso $n-1$:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2$$

che, sostituita nell'equazione precedente porge:

$$\boldsymbol{q} = \frac{\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{x}} - \eta)/\sigma_x}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (\frac{\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}}{\sigma_x})^2}}$$

Si porti infine $\sqrt{n-1}$ a numeratore ottenendo:

$$\boldsymbol{q} = \sqrt{n-1}\frac{\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{x}} - \eta)/\sigma}{\sqrt{\sum_i (\frac{\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}}{\sigma})^2}} = \sqrt{n-1}\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\chi}_{(n-1)}}$$

Dove l'ultima uguaglianza puó essere derivata in base ai punti (1) e (2). Confrontando quest'ultima espressione con (3.39) e tenendo presente che in base al punto (3) le due VA a numeratore e denominatore sono indipendenti si evince quanto affermato in precedenza, cioé che $\boldsymbol{q}$ é una quantitá pivotale per il calcolo degli intervalli di confidenza del valore medio.

Per utilizzare $\boldsymbol{q}$ nella stima dell'intervallo di confidenza si debbono determinare due percentili della distribuzione di Student tali che la quantitá pivotale sia contenuta all'interno dell'intervallo in una frazione $\gamma\%$ degli esperimenti. Poiché la densitá di probabilitá della legge di Student é simmetrica rispetto allo 0, allora se:

$$q_{\text{inf}} : \Pr(\boldsymbol{q} < q_{\text{inf}}) = \beta$$

$$q_{\text{sup}} : \Pr(\boldsymbol{q} > q_{\text{sup}}) = \beta$$

la VA $\boldsymbol{q}$ é contenuta all'interno di questo intervallo con probabilitá $1-2\beta = \gamma$, quindi, assegnato γ risulta

$$\beta = \frac{1-\gamma}{2}$$

Il percentile corrispondente a q_{sup} é quello a probabilitá pari a $1-\beta$. Poiché nelle tabelle sono, normalmente, contenuti i percentili superiori, per calcolare l'estremo superiore dell'intervallo di confidenza é necessario calcolare il percentile a probabilitá $1-\beta$ della distribuzione di Student ad $n-1$ gradi di libertá:

$$q_{\text{sup}} = T_{\frac{1+\gamma}{2},(n-1)} \tag{10.9}$$

l'estremo inferiore é:

$$q_{\text{inf}} = -q_{\text{sup}} \tag{10.10}$$

L'intervallo di confidenza bilaterale é:

$$[\overline{x} - T_{\frac{1+\gamma}{2},(n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \eta < \overline{x} + T_{\frac{1+\gamma}{2},(n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}] \tag{10.11}$$

10.3.2 Varianza

Poiché:

$$\boldsymbol{q} = (n-1)\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2}{\sigma^2} \tag{10.12}$$

segue una distribuzione del tipo chi quadrato con $n-1$ gradi di libertá, allora $\boldsymbol{q}$ é una quantitá pivotale per σ^2. Infatti, la distribuzione di $\boldsymbol{q}$ dipende esclusivamente dal numero di gradi di libertá, cioé dalla numerositá del campione.

Sia pertanto $X_{P,n}$ il percentile a probabilitá P di una distribuzione di tipo chi quadrato ad n gradi di libertá. Evidentemente:

$$\Pr(X_{\frac{1-\gamma}{2},n-1} \leq \boldsymbol{q} \leq X_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}) = \gamma \tag{10.13}$$

quindi l'intervallo $[X_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}, X_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}]$ puó essere utilizzato per definire un intervallo di confidenza bilaterale per σ^2. Si noti che l'intervallo cosí definito é subottimo. Infatti, l'utilizzo di percentili a probabilitá $(1-\gamma)/2$ ed $(1+\gamma)/2$ minimizza l'ampiezza dell'intervallo solo nel caso di distribuzioni simmetriche. La distribuzione di chi quadrato non é simmetrica, pertanto l'intervallo cosí determinato non é di lunghezza minima. Tuttavia, la procedura per determinare l'intervallo di lunghezza minima é complessa e, nella pratica, ci si riferisce sempre alla soluzione subottima.

Utilizzando la definizione di $\boldsymbol{q}$ si ottiene:

$$\Pr\left(X_{\frac{1-\gamma}{2},n-1} \leq (n-1)\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{2}}}{\sigma^2} \leq X_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right) = \gamma \tag{10.14}$$

da cui si ottiene l'intervallo di confidenza cercato:

$$\Pr\left(\frac{n-1}{X_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n-1}{X_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{2}}\right) = \gamma \tag{10.15}$$

Si noti un apparente paradosso: al crescere della numerositá del campione sembrerebbe (poicé n é a numeratore) che l'intervallo di confidenza diventi piú ampio, contrariamente alla logica degli intervalli di confidenza. Questo paradosso deriva dal non considerare l'andamento dei percentili della distribuzione di chi quadrato. Infatti, gli andamenti di $\frac{n-1}{X_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}$ e $\frac{n-1}{X_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}$, mostrati in figura 10.3.2, mostra che, in realtá, gli intervalli di confidenza si stringono al crescere di n, conformemente con la logica degli intervalli di confidenza.

10.3.3 Rapporto di varianze

In questo paragrafo si intende determinare l'intervallo di confidenza del rapporto di due varianze relative a due popolazioni normali. Le stime campionarie delle varianze si suppongono realizzate a partire da campioni di numerositá n_1 ed n_2 per la popolazione 1 e 2, rispettivamente.

La quantitá pivotale definita in (10.12) é distribuita secondo una legge di chi quadrato ad $n-1$ gradi di libertá. Per come é stata definita la legge di probabilitá F di Fisher, allora risulta immediato provare che la variabile aleatoria $\boldsymbol{q}$ definita a partire dalle varianze campionarie come:

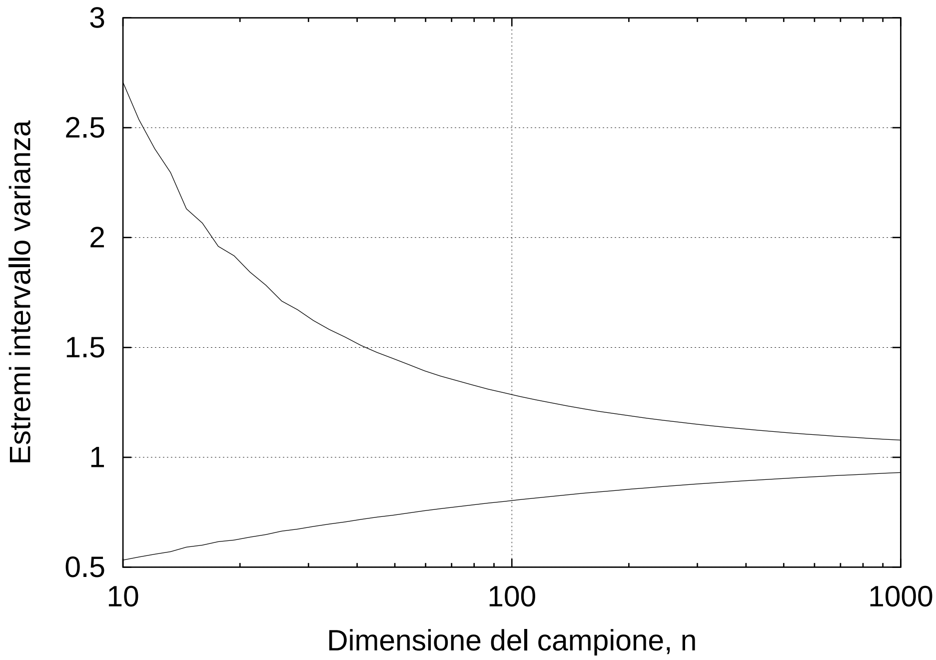

Figura 10.4: Andamento di $\frac{n-1}{X_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}$ e $\frac{n-1}{X_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}}$ al variare di n, dimensione del campione.

$$\boldsymbol{q} = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^2}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \tag{10.16}$$

segue la legge di F ad $n_1 - 1$ ed $n_2 - 1$ gradi di libertá, ed é una quantitá pivotale per il rapporto di varianze.

Pertanto, se $F_{P,(n,m)}$ é il percentile della distribuzione F a probabilitá P ed n, m gradi di libertá, é:

$$\begin{aligned}
\Pr(F_{\frac{1-\gamma}{2},(n_1-1,n_2-1)} \le \boldsymbol{q} \le F_{\frac{1+\gamma}{2},(n_1-1,n_2-1)}) &= \\
\Pr\left(F_{\frac{1-\gamma}{2},(n_1-1,n_2-1)} \le \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^2}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{\frac{1+\gamma}{2},(n_1-1,n_2-1)}\right) &= \gamma
\end{aligned}$$

e da quest'ultima l'intervallo di confidenza cercato:

$$\Pr\left(\frac{\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^2}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^2}}{F_{\frac{1+\gamma}{2},(n_1-1,n_2-1)}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^2}{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^2}}{F_{\frac{1-\gamma}{2},(n_1-1,n_2-1)}}\right) = \gamma \tag{10.17}$$

10.4 Il metodo statistico

Un altro metodo per ottenere intervalli di confidenza é il metodo statistico. Per applicare il metodo statistico é necessario conoscere la densitá di probabilitá dello stimatore (che sará indicato come una statistica $\boldsymbol{t}$ con il valore sperimentale t uguale alla stima del parametro, cioé $t = \hat{\theta}$) per ogni valore del parametro incognito, cioé $f(t \mid \theta)$. Si supponga ora che siano calcolabili (eventualmente in modo numerico) le funzioni $h_1(\theta)$ ed $h_2(\theta)$ che godano delle proprietá seguenti:

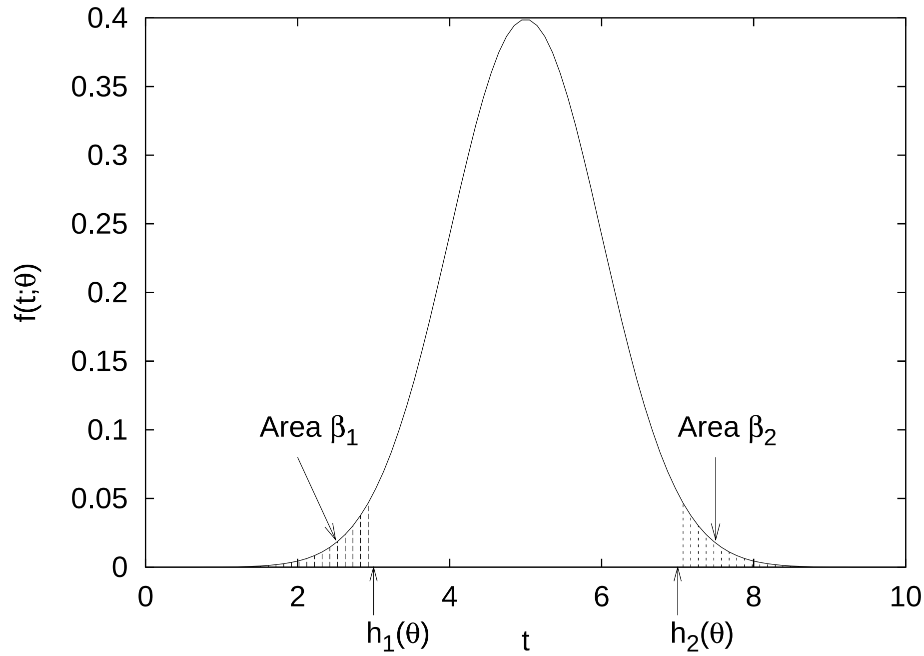

Figura 10.5: Significato delle funzioni $h_1(\theta)$ ed $h_2(\theta)$ utilizzate nel metodo statistico.

$$\int_{-\infty}^{h_1(\theta)} f(t \mid \theta)\mathrm{d}t = \beta_1 \tag{10.18}$$

$$\int_{h_2(\theta)}^{\infty} f(t \mid \theta)\mathrm{d}t = \beta_2 \tag{10.19}$$

con il vincolo $\beta_1 + \beta_2 < 1$. Il significato delle due funzioni é mostrato nella figura 10.5: $h_1(\theta)$ e $h_2(\theta)$ sono i percentili a probabilitá β_1 ed $1 - \beta_2$ della distribuzione di probabilitá di $\boldsymbol{t}$.

Si traccino ora le due funzioni $h_1(\theta)$ ed $h_2(\theta)$ in funzione di θ. Si assuma, per semplicitá, che le due funzioni siano monotone crescenti, come mostrato in 10.6. Con $t = \hat{\theta}$ in 10.6 si indica il valore ottenuto per lo stimatore sulla base dei dati misurati, cioé $\{x_1, \dots x_n\}$. Siano inoltre:

$$\theta_{\text{inf}} = h_2^{-1}(t) \tag{10.20}$$

$$\theta_{\text{sup}} = h_1^{-1}(t) \tag{10.21}$$

Si intende dimostrare che θ_{inf} e θ_{sup} sono, effettivamente, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di confidenza di θ avente confidenza γ pari ad $1 - \beta_1 - \beta_2$.

Per fare ció é necessario enfatizzare che il valore osservato dello stimatore é la realizzazione di una variabile aleatoria $\boldsymbol{t}$ e che l'intervallo

$$U(\boldsymbol{t}) = [h_2^{-1}(\boldsymbol{t}), h_1^{-1}(\boldsymbol{t})]$$

é un intervallo aleatorio, cioé una famiglia di intervalli con estremi variabili in modo aleatorio. Se tale intervallo é un intervallo di confidenza, allora, per definizione di intervallo di confidenza, nel $\gamma\%$ dei casi di infinite prove l'intervallo calcolato deve contenere il valore vero del parametro θ_0. La figura 10.7 mostra che solo per

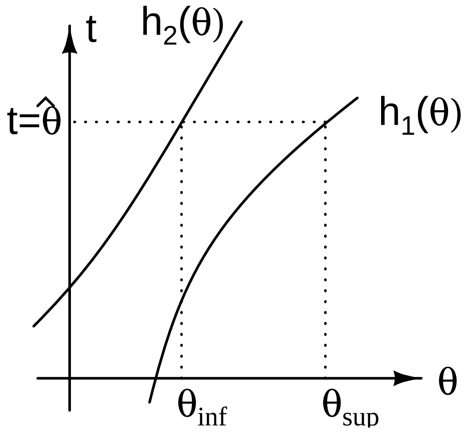

Figura 10.6: Calcolo dell'intervallo di confidenza mediante il metodo statistico.

$$t > t_2 = h_2(\theta_0)$$

$$t < t_1 = h_1(\theta_0)$$

gli intervalli calcolati non comprendono θ_0. Tuttavia, per come sono state definite le funzioni h_1 ed h_2 ció accade esclusivamente nel $(\beta_1 + \beta_2)\%$ dei casi. Quindi, nel rimanente $\gamma\%$ dei casi gli intervalli calcolati comprendono θ_0. Cioé il metodo statistico porta a scrivere, effettivamente, un intervallo di confidenza per θ_0

10.5 Intervallo di confidenza per la probabilitá

Per calcolare l'intervallo di confidenza per la probabilitá di un evento é necessario utilizzare l'algoritmo di Clopper e Pearson. Tale algoritmo non é altro che l'applicazione per la stima intervallare della probabilitá del metodo statistico, presentato nella sezione precedente.

La statistica, in questo caso, é il numero di volte, $\boldsymbol{k}$, in cui si verifica l'evento $\mathcal{E}$ in n esperimenti ripetuti. Il parametro θ in questione é il valore p della probabilitá di $\mathcal{E}$.

Si ricorda che, fissato un numero k arbitrario e la probabilitá p dell'evento $\mathcal{E}$, la probabilitá di osservare k volte l'evento $\mathcal{E}$ in n esperimenti é:

$$\Pr(\boldsymbol{k} = k \ (n \text{ lanci})) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} \tag{10.22}$$

Dunque, fissato un valore p della probabilitá di $\mathcal{E}$, il percentile a probabilitá P della distribuzione é quel numero k per cui si verifica che:

$$\Pr(\boldsymbol{k} \leq k \ (n \text{ lanci})) = \sum_{i=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) p^i (1-p)^{n-i} = P \tag{10.23}$$

Quindi, ricordando la definizione delle funzioni $h_1(\theta)$ e $h_2(\theta)$ utilizzate nel metodo statistico e tenendo conto che, in questo caso $\theta = p$, si conclude che $h_1(p)$ é quell'intero che, per un prefissato valore di probabilitá p, soddisfa la condizione:

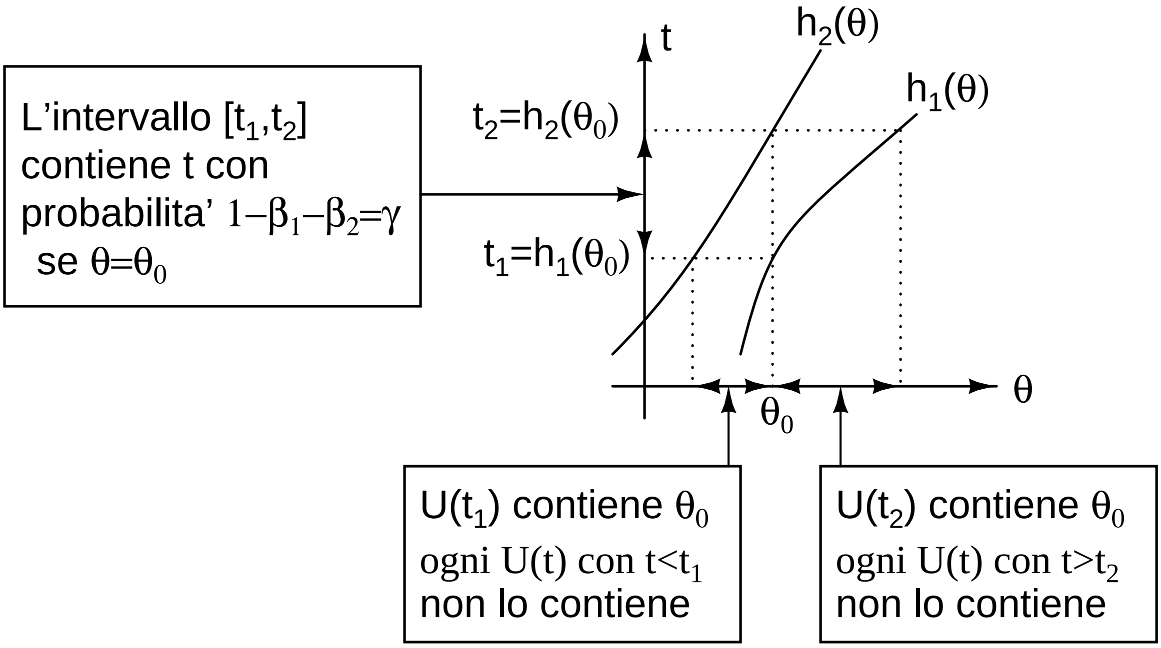

Figura 10.7: Dimostrazione del calcolo dell'intervallo di confidenza mediante il metodo statistico.

$$\sum_{i=0}^{h_1(p)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \beta_1 \tag{10.24}$$

e, simmetricamente:

$$\sum_{i=h_2(p)}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \beta_2 \tag{10.25}$$

Poiché nelle applicazioni pratiche p non é noto ma é noto il valore k assunto dalla VA $\boldsymbol{k}$ le equazioni precedenti vanno risolte cercando p_l e p_u tali che:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_u^i (1-p_u)^{n-i} \leq \beta_1 \tag{10.26}$$

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_l^i (1-p_l)^{n-i} \leq \beta_2 \tag{10.27}$$

L'intervallo $[p_l, p_u]$ costituisce l'intervallo di confidenza cercato. Il procedimento descritto é mostrato graficamente in figura 10.8. La figura mostra il calcolo dell'intervallo di confidenza (pari a $[0.45, 0.83]$) della probabilitá di un evento verificatosi 13 volte in 20 esperimenti successivi, evidenziando la natura "a scalinata" delle funzioni $h_1(p)$ e $h_2(p)$. Tale andamento non deve sorprendere, in quanto k non puó che assumere valori discreti.

Per calcolare gli intervalli di confidenza della probabilitá sono possibili tre strade. La prima é quella percorsa per tracciare la figura 10.8. Tale strada richiede un calcolatore dotato di una routine in grado di invertire (10.23), ricavando p per k, n e P fissati. Utilizzando il calcolatore si tracciano, numericamente, le due funzioni a gradinata, quindi si detrmina graficamente l'intervallo di confidenza. La seconda strada

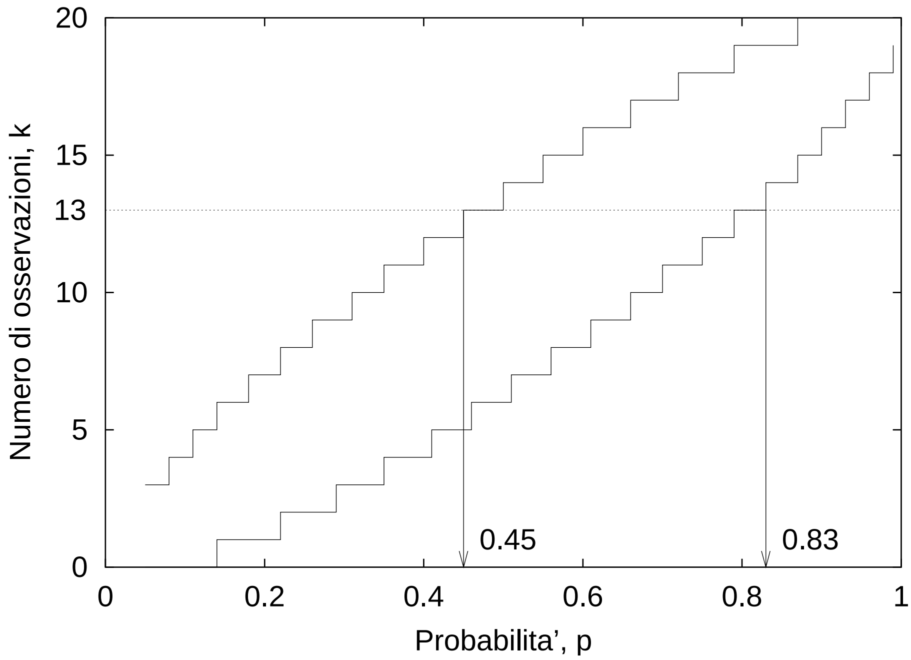

Figura 10.8: Intervallo di confidenza della probabilitá di un evento verificatosi 13 volte in 20 esperimenti successivi ($\hat{p} = 13/20 = 0.65$).

é quella di utilizzare carte pretracciate. La terza, infine, consiste nell'utilizzare l'approssimazione normale per la distribuzione della probabilitá. Quest'ultima strada é descritta nella sezione successiva.

Quando $k = 0$ o $k = n$ si utilizzano le seguenti coppie di equazioni:

$$\hat{p}_l = 0 \tag{10.28}$$

$$\hat{p}_u = 1 - \sqrt[n]{\beta_1} \tag{10.29}$$

per $k = 0$, altrimenti, per $k = n$ si utilizza:

$$\hat{p}_l = \sqrt[n]{\beta_2} \tag{10.30}$$

$$\hat{p}_u = 1 \tag{10.31}$$

10.5.1 Calcolo mediante l'approssimazione normale

Il calcolo mediante approssimazione normale viene praticato quando il minimo fra $n\hat{p}$ e $n(1-\hat{p})$ (essendo $\hat{p}$ la stima puntuale della probabilitá) é maggiore di 5. Ció accade, generalmente, per campioni di numerositá n abbastanza elevata.

Per utilizzare il metodo si costruisce la VA $\boldsymbol{x}$ che é pari ad 1 quando si verifica l'evento, pari a 0 se non si verifica l'evento considerato. E' agevole verificare che:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{x}] = p$$

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{x}^2] = p$$

quindi

$$\sigma_x^2 = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{x}^2] - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{x}]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

dove $q = 1 - p$. La distribuzione della VA $\overline{\boldsymbol{x}}$, che coincide con la stima puntuale della probabilitá, puó essere approssimata, utilizzando l'approssimazione di deMoivre Laplace, ad una distribuzione normale. Pertanto, poiché $\overline{\boldsymbol{x}}$ ha valore atteso p e varianza pari a pq/n la statistica:

$$\boldsymbol{q} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sqrt{n} \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{10.32}$$

é una quantitá pivotale per p. Pertanto, se γ é la confidenza richiesta, e $Z_{(1+\gamma)/2}$ é il percentile alla probabilitá $(1+\gamma)/2$ della distribuzione normale normalizzata, allora l'intervallo di confidenza per la probabilitá puó essere determinando ricavando p dall'equazione (10.32). La soluzione é:

$$\hat{p}_{l,u} = \frac{(k + 0.5Z^2_{(1+\gamma)/2}) \pm Z_{(1+\gamma)/2}\sqrt{k(1-k/n) + Z^2_{(1+\gamma)/2}/4}}{n + Z^2_{(1+\gamma)/2}} \tag{10.33}$$

con l'intervallo di confidenza costruito come:

$$\hat{p}_l \leq p \leq \hat{p}_u \tag{10.34}$$

Per $n > 100$ é possibile confondere la stima della varianza con la varianza stessa, determinando una espressione decisamente piú semplice:

$$\hat{p} - Z_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{10.35}$$

10.6 Intervallo di confidenza per λ di una distribuzione esponenziale

Durata del test prefissata

Sia T la durata prefissata del test. Il verificarsi di k eventi nell'intervallo $[0, T]$ ha una probabilitá che puó essere calcolata utilizzando la seguente equazione (legge di probabilitá di Poisson, identitá non dimostrata):

$$\Pr(\boldsymbol{k} = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp(-\lambda T) \tag{10.36}$$

Il problema della determinazione dell'intervallo di confidenza per λ é praticamente identico alla determinazione dell'intervallo di confidenza per la probabilitá. In pratica, si tratta di risolvere la seguente coppie di equazioni:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(\hat{\lambda}_u T)^i}{i!} \exp(-\hat{\lambda}_u T) = \beta_1 \tag{10.37}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\hat{\lambda}_l T)^i}{i!} \exp(-\hat{\lambda}_l T) = \beta_2 \tag{10.38}$$

se $k > 0$ o, alternativamente:

$$\hat{\lambda}_u = \frac{\log(1/\beta_1)}{T} \tag{10.39}$$

$$\hat{\lambda}_l = 0 \tag{10.40}$$

se $k = 0$. Queste equazioni forniscono gli intervalli di confidenza per λ con una probabilitá non inferiore a $\gamma = 1 - \beta_1 - \beta_2$. Tuttavia, poiché almeno una delle sommatorie si estende fino all'infinito, si utilizzano le seguenti equazioni:

$$\hat{\lambda}_u = \frac{X_{(1-\beta_1),2(k+1)}}{2T} = \hat{\lambda}\frac{X_{(1-\beta_1),2(k+1)}}{2k} \tag{10.41}$$

$$\hat{\lambda}_l = \frac{X_{(\beta_2),(2k)}}{2T} = \hat{\lambda}\frac{X_{\beta_2,2k)}}{2k} \tag{10.42}$$

dove $X_{(\nu),(P)}$ é il percentile a probabilitá P della distribuzione di chi quadrato avente ν gradi di libertá. Le espressioni precedenti sono ricavate sfruttando l'identitá:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{m^i}{i!}\exp(-m) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k!2^{k+1}}\int_0^{2m} x^k \exp(-x/2)\mathrm{d}x\right) \tag{10.43}$$

dove il termine entro parentesi coincide con una distribuzione di tipo chi quadrato avente $\nu = 2k$ gradi di libertá.

Le precedenti espressioni, valide per il parametro λ di una distribuzione esponenziale possono essere applicate per determinare l'intervallo di confidenza di $1/\lambda$. In teoria dell'affidabiltá tale parametro é, generalmente, un tempo medio fra i guasti (o fra le riparazioni), pertanto:

$$M\hat{T}TF_l = \frac{2T}{X_{(1-\beta_1),2(k+1)}} \tag{10.44}$$

$$M\hat{T}TF_u = \frac{2T}{X_{(\beta_2),(2k)}} \tag{10.45}$$

Numero di guasti prefissato

Per calcolare l'intervallo di confidenza si osservi che se $\boldsymbol{t}_i$ sono i tempi di guasto dei singoli dispositivi, t un tempo cumulato di prova prefissat e o $\boldsymbol{k}$ in lumero dei guasti in $[0, t]$, allora é:

$$\Pr(\boldsymbol{t}_1 + \ldots + \boldsymbol{t}_n \leq t) = \Pr(\boldsymbol{k} > n) = 1 - \Pr(\boldsymbol{k} \leq n) \tag{10.46}$$

Utilizzando l'espressione di $\Pr(\boldsymbol{k} \leq n)$ ottenuta dalla legge di Poisson e l'identitá (10.43) é possibile scrivere:

$$1 - \Pr(\boldsymbol{k} \leq n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\exp(-\lambda t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\lambda t} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \tag{10.47}$$

Generalizzando:

$$\Pr(a \leq \boldsymbol{t}_1 + \ldots + \boldsymbol{t}_n \leq b) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{\lambda a}^{\lambda b} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \tag{10.48}$$

Si scelgano ora a e b nel modo seguente:

$$a = \frac{n(1-\epsilon_2)}{\lambda} \tag{10.49}$$

$$b = \frac{n(1+\epsilon_1)}{\lambda} \tag{10.50}$$

sostituendo in (10.48) si ottiene:

$$\Pr\left(\frac{1-\epsilon_2}{\lambda} \le \frac{\boldsymbol{t}_1 + \ldots + \boldsymbol{t}_n}{n} \le \frac{1+\epsilon_1}{\lambda}\right) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{n(1-\epsilon_2)}^{n(1+\epsilon_1)} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \tag{10.51}$$

Poiché la stima di λ é data dal rapporto fra il numero di prove ed il tempo cumulato di prova:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_1 + \ldots + t_n} \tag{10.52}$$

si evince che gli estremi dell'intervallo in (10.51), cioé:

$$\hat{\lambda}_l = (1-\epsilon_2)\hat{\lambda} \tag{10.53}$$

$$\hat{\lambda}_u = (1+\epsilon_1)\hat{\lambda} \tag{10.54}$$

possono essere utilizzati come estremi dell'intervallo di confidenza. Per fare ció é sufficiente che la probabilitá in (10.51) valga $1-\beta_1-\beta_2$. Dunque, imponendo che

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{n(1+\epsilon_1)}^{\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \beta_1 \tag{10.55}$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{n(1-\epsilon_2)} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \beta_2 \tag{10.56}$$

si ottengono gli estremi dell'intervallo di confidenza:

$$\epsilon_1 = \frac{X_{1-\beta_1,2n}}{2n} - 1 \tag{10.57}$$

$$\epsilon_2 = 1 - \frac{X_{\beta_2,2n}}{2n} \tag{10.58}$$

e:

$$\hat{\lambda}_l = \frac{X_{\beta_2,2n}}{2n}\hat{\lambda} \tag{10.59}$$

$$\hat{\lambda}_u = \frac{X_{1-\beta_1,2n}}{2n}\hat{\lambda} \tag{10.60}$$