

Appunti del corso di Affidabilità e Diagnostica dei Sistemi Elettrici

Andrea Cavallini, Gian Carlo Montanari
DIE-Università di Bologna
viale Risorgimento 2, 40136 Bologna
andrea.cavallini@mail.ing.unibo.it
<http://limat.ing.unibo.it>

A.A 1999/2000

Indice

1	Calcolo delle probabilità	6
1.1	Esperimento aleatorio	6
1.2	Eventi e spazi rappresentativi	6
1.3	Algebra degli eventi	7
1.4	Probabilità	9
1.5	Alcune conseguenze degli assiomi (1)-(3)	10
1.5.1	Probabilità di \emptyset	10
1.5.2	Probabilità di $\bar{\mathcal{E}}$	10
1.5.3	Probabilità di $\mathcal{E} - \mathcal{F} = \mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}$	10
1.5.4	Probabilità di $\mathcal{E} + \mathcal{F}$	11
1.6	Combinazioni di eventi equiprobabili: il campionamento	13
1.6.1	Campionamento con reintroduzione	17
1.6.2	Campionamento senza reintroduzione	18
1.7	La legge dei grandi numeri	19
2	Indipendenza e dipendenza stocastica	20
2.1	Probabilità condizionata	20
2.2	Indipendenza stocastica	21
2.2.1	Chain rule	22
2.2.2	Esempi	22
2.3	Numero di successi in esperimenti ripetuti	24
2.4	Approssimazioni della distribuzione binomiale	26
2.4.1	Il teorema di deMoivre Laplace	26
2.4.2	Il teorema di Poisson	27
2.5	Probabilità totale	30
3	Variabili aleatorie	32
3.1	Il concetto di variabile aleatoria	32
3.2	Eventi	33
3.3	Funzioni di distribuzione	34
3.4	Densità di probabilità	37
3.4.1	Classificazione delle VA ed eventi delle VA continue	37
3.4.2	Densità di probabilità	39
3.4.3	VA discrete come caso particolare di VA continue	39

3.4.4	VA miste	40
3.5	Percentili	40
3.6	Trasformazioni lineari	41
3.7	Funzioni di uso comune	42
3.7.1	Distribuzione normale (gaussiana)	43
3.7.2	Distribuzione lognormale	48
3.7.3	Distribuzione di Weibull	50
3.7.4	Distribuzione esponenziale	51
3.7.5	Distribuzione chi-quadro	52
3.7.6	Legge di probabilità, di Student	53
3.7.7	La distribuzione F di Snedecor	54
3.8	Distribuzioni condizionate	54
3.9	Appendice 1: L'impulso di Dirac e derivata generalizzata	57
3.9.1	Definizione	57
3.9.2	Derivata di funzioni con discontinuità	59
3.10	Appendice 2: Tavole della distribuzione normale	60
3.11	Appendice 3: Tavole della distribuzione chi-quadro	63
4	Variabili aleatorie bivariate	65
4.1	Eventi	65
4.2	Distribuzione e densità di probabilità	66
4.3	Distribuzioni marginali	66
4.4	Variabili aleatorie congiuntamente normali	69
4.5	Indipendenza stocastica	69
4.6	Alcune funzioni di VA doppie	70
4.6.1	Somma di due variabili aleatorie	70
4.6.2	Differenza di due VA	72
4.6.3	Massimo di due VA	73
4.6.4	Minimo di due VA	74
4.7	Distribuzioni condizionate	75
4.7.1	Variabili aleatorie congiuntamente normali	77
5	Momenti di una variabile aleatoria	79
5.1	Previsione di una variabile aleatoria	79
5.1.1	Previsione di una sequenza di dati	79
5.1.2	Comportamento asintotico: il valore atteso e media	80
5.1.3	La probabilità come valore atteso	82
5.1.4	Esistenza del valore atteso	82
5.1.5	Linearità del valore atteso	83
5.1.6	Altre misure di intensità	83
5.2	Momenti del secondo ordine di VA univariate: varianza	84
5.3	Il lemma di Tchebycheff	86
5.4	Altre misure di dispersione	88
5.5	Momenti di ordine superiore a 2	88

5.6	Momenti del secondo ordine di VA doppie: covarianza	89
5.6.1	Trasformazioni lineari	92
5.7	Il teorema del limite centrale	94
5.8	Valore atteso e varianza condizionati	96
6	Affidabilità	99
6.1	Generalità sul guasto	99
6.2	Sistemi non riparabili	101
6.2.1	Funzioni affidabilistiche empiriche	103
6.2.2	Il tasso di guasto istantaneo	104
6.2.3	Parametri affidabilistici	106
6.3	Tasso di guasto per componenti elettronici	107
6.4	Generalità, concetto di missione	110
6.5	Il diagramma affidabilistico	110
6.6	Strutture semplici	112
6.6.1	Sistemi di tipo serie	112
6.6.2	Sistemi di tipo parallelo (ridondanza)	112
6.6.3	Combinazione di strutture tipo serie e parallelo	113
6.6.4	Influenza del modo di guasto dei dispositivi	113
6.7	Strutture complesse	116
6.7.1	Il metodo della probabilità totale	116
6.7.2	Il metodo dello spazio degli stati	117
7	Disponibilità	119
7.1	Definizioni	119
7.1.1	Analisi con le catene di Markov	120
7.2	Analisi combinatoria	121
7.2.1	Frequenza	121
7.3	Analisi di sistemi serie/parallelo	124
7.3.1	Sistemi con dispositivi a guasti indipendenti	124
7.3.2	Sistemi con dispositivi a guasti dipendenti	127
7.4	Ridondanza	129
7.5	Analisi affidabilistica di un sistema di distribuzione radiale	132
7.5.1	Considerazioni generali	132
7.5.2	Criterio di guasto	134
7.5.3	Sistema radiale semplice (1)	135
7.5.4	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione esterna all'impianto.	138
7.5.5	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione alla sbarra di media tensione dell'utente.	141
7.5.6	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione al primario del trasformatore.	143
7.5.7	Sistema radiale con selezione della linea di alimentazione al secondario del trasformatore.	145

8	Metodi empirici	147
8.1	Stima empirica delle leggi di probabilità	147
8.2	Percentili	152
8.3	Carte probabilistiche	152
8.4	Stima empirica di momenti e percentili	154
8.4.1	Valore atteso	154
8.4.2	Varianza	155
8.4.3	Covarianza e correlazione empiriche	155
8.4.4	Momenti	156
9	Stime puntuali	157
9.1	Introduzione	157
9.2	Proprietà degli stimatori	157
9.3	Il metodo dei momenti	161
9.4	Principio di massima verosimiglianza, ML	163
9.4.1	Proprietà dello stimatore ML	164
9.4.2	Stima ML della probabilità di un evento	165
9.4.3	Stima dei parametri di una distribuzione normale	166
9.4.4	Stima ML del tasso di guasto	166
9.4.5	Stima dei parametri di una distribuzione di Weibull	168
10	Stime per intervalli	170
10.1	Introduzione	170
10.2	Quantità pivotali	170
10.2.1	Il metodo della quantità pivotale	173
10.3	Campionamento da una distribuzione normale	174
10.3.1	Calcolo degli intervalli di confidenza per la media	174
10.3.2	Varianza	176
10.3.3	Rapporto di varianze	176
10.4	Il metodo statistico	177
10.5	Intervallo di confidenza per la probabilità	179
10.5.1	Calcolo mediante l'approssimazione normale	181
10.6	Intervallo di confidenza per λ di una distribuzione esponenziale	182
11	Verifica delle ipotesi	185
11.1	Introduzione	185
11.2	Ipotesi parametriche	185
11.2.1	Esempio di test per la media	188
11.2.2	Ipotesi semplici e composte	189
11.3	Test bidirezionali	192
11.3.1	Intervalli di confidenza	193
11.4	Test unidirezionali	194
11.4.1	Intervalli di confidenza	194
11.5	Test sulla media	195

11.5.1	Test bidirezionale	195
11.5.2	Test unidirezionali	197
11.6	Test sulla varianza per distribuzioni normali	198
11.7	Test sul rapporto delle varianze per distribuzioni normali	198
11.7.1	Test bidirezionali	198
11.7.2	Test unidirezionali	199
11.8	Test su due medie	199
11.8.1	Varianze identiche	199
11.8.2	Varianze diverse	200
11.9	Test bilaterali	201
11.9.1	Test bilaterale sulla probabilità	202
11.9.2	Test bilaterale su <i>MTBF</i>	203
11.9.3	Test sequenziali	205
11.10	Test non parametrici	206
11.10.1	Test di adattamendo del chi quadrato	206

Capitolo 6

Affidabilità

6.1 Generalità sul guasto

Definizione 6.1.1 (Guasto) *Cessazione dell'attitudine del dispositivo ad adempiere la funzione richiesta.*

Il criterio di guasto può essere quantificato nel modo seguente. Si supponga, a titolo di esempio, di considerare il guasto di un semplice partitore resistivo. Sia r il rapporto di partizione $r = R_1/(R_1 + R_2)$. Il partitore si considera funzionante in modo corretto se il rapporto r è compreso nell'intervallo $[r_{inf}, r_{sup}]$. Inoltre, per evitare che il partitore assorba una corrente eccessiva, deve essere $R_1 + R_2 \geq R_{inf}$. Esplicitando il legame fra R_1 ed R_2 imposto dal rapporto di partizione si ottiene:

$$R_2 = R_1 \frac{1-r}{r}$$

che impone una relazione lineare fra R_1 ed R_2 , esplicitabile come una retta passante per l'origine e di pendenza $1/r - 1$ (nota che $0 \leq r \leq 1$) nel piano (R_1, R_2) . In modo simile, la relazione $R_1 + R_2 = R_{inf}$ impone una relazione lineare fra R_1 ed R_2 esplicitabile come una retta per $(0, R_{inf})$ e $(R_{inf}, 0)$ nel piano (R_1, R_2) . In sostanza, il sistema partitore funziona correttamente per ogni coppia (R_1, R_2) nel dominio D di figura 6.1. Il guasto avviene al tempo t se $(R_1(t), R_2(t))$ attraversa la frontiera di D.

I guasti possono essere classificati in vari modi, ad esempio, seguendo il seguente schema:

- Causa
 - impiego improprio
 - usura
 - deficienza intrinseca (primari o indotti)
- Impatto
 - critici
 - primari
 - secondari
- Entità
 - parziali
 - totali

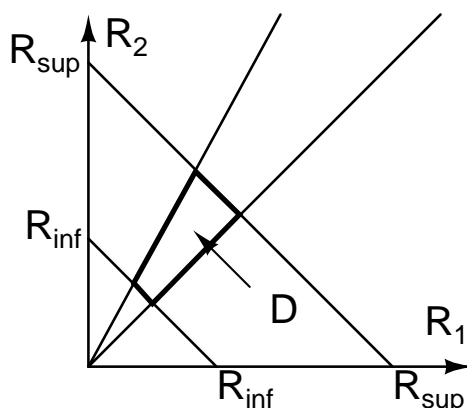


Figura 6.1: Dominio di corretto funzionamento per un partitore resistivo avente rapporto di partizione che deve essere compreso in $[r_{inf}, r_{sup}]$ e resistenza totale non inferiore ad R_{inf}

- intermittenti
- Evoluzione temporale
 - progressivi
 - improvvisi

Il tempo al guasto, cioè la lunghezza del periodo in cui il dispositivo rimane in servizio fornendo correttamente la funzione richiesta è una variabile aleatoria. I motivi per cui il tempo al guasto è aleatorio sono tre: (a) i materiali hanno struttura non uniforme, quindi resistenza alle sollecitazioni che varia in modo aleatorio da campione a campione di materiale (ad esempio, provini identici dello stesso materiale possono avere rigidità dielettriche diverse), (b) le cause di invecchiamento o fattori di stress possono variare in modo aleatorio nel tempo (ad esempio, i tempi di arrivo delle sovratensioni atmosferiche), (c) le macchine possono essere chiamate ad operare in modo non continuativo ma aleatorio (si pensi ad una saldatrice, quando sarà utilizzata la prossima volta e come sarà utilizzata, per quanto tempo?).

E' importante osservare che un dispositivo che, immediatamente dopo la produzione, è in grado di espletare la funzione richiesta non è necessariamente un dispositivo affidabile. Si distingue infatti la conformità, cioè il fatto che il dispositivo appena prodotto sia conforme a certi requisiti, dall'affidabilità, che tratta la capacità del dispositivo di rimanere conforme ai requisiti dati per un tempo prefissato. La conformità è una proprietà relativa al tempo $t = 0$, immediatamente successivo alla produzione.

I guasti comportano costi legati al mancato utilizzo dei macchinari, perdite di vite umane, guasti indotti (ad esempio, un isolamento che cede può portare ad un corto circuito che danneggia i conduttori). Inoltre la riparazione di un guasto è spesso meno economica di un intervento di manutenzione programmata (non è necessario effettuare una diagnostica prima di intervenire, la squadra può intervenire nel momento più opportuno, ecc.). Quantitativamente, la perdita economica per anno legata al guasto (in ambiente industriale) è esplicitabile come:

$$K = N_{anno}(K_{riparazione} + (r + s)(G_p - K_p)) \quad (6.1)$$

essendo N_{anno} il numero di guasti per anno, $K_{riparazione}$ la spesa media di riparazione, r il tempo medio di riparazione, s il tempo medio necessario per fare ripartire la produzione una volta rimosso il guasto, G_p e K_p la redditività ed il costo orario della produzione.

E' quindi necessario che il progettista di un sistema cerchi di minimizzare il rischio economico legato ai guasti. Poiché il guasto è un fenomeno aleatorio, la minimizzazione del rischio ad esso associato deve

essere fatto mediante tecniche probabilistiche. Generalmente é necessario specificare e quantificare il costo legato al guasto e minimizzarne il valore atteso.

In un sistema di produzione, trasmissione ed utilizzo dell'energia elettrica, i guasti possono essere classificati nel modo seguente [?]. Guasti aventi sede nell'impianto utilizzatore:

- Completa o parziale inoperativitá dell'impianto o, piú in generale, operativitá inferiore ai livelli nominali
- Comportamento inaccettabile di apparecchiature nell'impianto
- Inserzione dei dispositivi di protezione o di emergenza
- Mancata fornitura di energia a dispositivi o sottocircuiti dell'impianto.

Guasti aventi sede nel sistema di produzione/trasmissione:

- Interruzione della fornitura
- Deviazione della forma d'onda di tensione rispetto ai profili standard per effetto di flicker, sovratensioni, buchi di tensione, armoniche, ecc..

Gli indici comunemente accettati per valutare la bontá di un sistema di produzione/trasmissione sono:
(a) indici primari

- numero di interruzioni per anno (λ)
- durata media dell'interruzione (r)

(b) indici secondari

- numero di ore di guasto per anno
- valore atteso dell'energia richiesta ma non fornita nel corso dell'anno

6.2 Sistemi non riparabili

Il concetto di qualitá di un dispositivo, o di un sistema, é legato alla fiducia che si ha nel dispositivo (o sistema), fiducia che non si rompa, che si comporti in modo soddisfacente. Nel modo piú semplice possibile tale fiducia puó essere espressa come la *conformitá* del dispositivo all'atto dell'acquisto. Tale conformitá richiede che ogni parametro vitale per il corretto funzionamento del dispositivo (ad esempio, il rapporto di trasduzione di un partitore resistivo, il rapporto spire e le perdite in corto circuito ed a vuoto di un trasformatore) stiano all'interno di prefissati intervalli di tolleranza. La conformitá del dispositivo puó essere perseguita dal produttore mediante controlli sulla produzione o dal compratore, mediante collaudi da effettuarsi sul dispositivo o su un campione della produzione all'atto dell'acquisto. Le prove di conformitá si distinguono in:

- controlli di produzione
- collaudi (prove di tipo, accettazione e mantenimento della qualitá)

Piú complesso é rispondere al problema se, una volta comprato, il dispositivo o sistema sará conforme alle aspettative per un tempo adeguato. In altre parole, la qualitá durerá nel tempo? Sará lecito avere fiducia nel dispositivo dopo un certo tempo dall'acquisto? Per risolvere questo problema, che in pratica si pone come un problema di predizione, si devono utilizzare tecniche probabilistiche. Tali tecniche vanno sotto il nome generico di analisi affidabilistiche e permettono di ricavare (1) funzioni affidabilistiche, (2) parametri

affidabilistici. In generale, le funzioni affidabilistiche rappresentano l'evoluzione della probabilità di guasto al variare del tempo, mentre i parametri affidabilistici rappresentano valori medi dei tempi al guasto o probabilità di trovare in servizio un sistema che, in caso di guasto, può essere riparato.

Gli studi affidabilistici permettono di ricavare la probabilità dei tempi al guasto o valori medi dei tempi al guasto per un dispositivo o un insieme di dispositivi. Il primo problema è indicato come analisi di affidabilità, il secondo come analisi affidabilistica combinatoria. Il primo problema richiede, fra l'altro, l'analisi statistica dei tempi al guasto derivati da test di rottura in laboratorio o da osservazioni fatte da dispositivi operanti sul campo. Le prove affidabilistiche si distinguono in:

- prove di vita (di lunga durata, accelerate)
- prove di verifica dell'affidabilità
- prove di determinazione dell'affidabilità

Il secondo problema, cioè l'analisi combinatoria di affidabilità, consiste nella combinazione di funzioni e parametri derivanti dall'analisi affidabilistica dei singoli dispositivi. È importante osservare che la distinzione fra dispositivo e sistema è puramente funzionale. Ad esempio, nel sistema di generazione elettrica una centrale di produzione può essere pensata come un singolo dispositivo. Tuttavia, quando si intende analizzare l'influenza che la configurazione dei vari apparati della centrale ha sull'affidabilità della centrale stessa, allora può essere conveniente separare i circuiti elettrici da quelli termici, l'alternatore dal trasformatore, i servizi ausiliari dalla generazione, ecc..

Per quantificare i concetti esposti si definisce:

Definizione 6.2.1 (Affidabilità) *È la probabilità, valutata all'istante 0 in cui il dispositivo (o sistema) viene messo in servizio, che il dispositivo funzioni correttamente in $[0, t]$. Se t è la VA che descrive il tempo la guasto, allora:*

$$R(t) = \Pr(\text{Il dispositivo funziona in } [0, t]) = \Pr(t > t) \quad (6.2)$$

Nel definire la affidabilità è necessario specificare il tipo di guasto, ad esempio, circuito aperto o corto circuito. In teoria, sarebbe necessario specificare una funzione affidabilistica per ogni tipo di guasto.

L'affidabilità si indica generalmente con il simbolo R dall'inglese *reliability*. L'istante t quantifica il tempo totale di esposizione del sistema, cioè il tempo netto di funzionamento. L'istante t può quindi coincidere con il tempo trascorso dall'istante di attivazione per un dispositivo operante in modo continuo, oppure con una frazione di esso se il dispositivo opera in modo discontinuo. In generale, se δ è il ciclo di lavoro del dispositivo, T il tempo totale (misurato dal calendario) di servizio del dispositivo, si ha:

$$t = T \mathbf{E}[\delta] \quad (6.3)$$

Se l'intervallo non è $[0, t]$ ma, più genericamente $[t_1, t_2]$, allora si definisce:

Definizione 6.2.2 (Affidabilità di missione) *È la probabilità, valutata supponendo che il dispositivo sia sano in t_1 , che il dispositivo funzioni correttamente in $[t_1, t_2]$:*

$$R_m(t_1, t_2) = \Pr(t > t_2 \mid t > t_1) \quad (6.4)$$

Il legame fra R ed R_m si esplicita immediatamente in base alla definizione di probabilità condizionata ($\Pr(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \Pr(\mathcal{E}\mathcal{F}) / \Pr(\mathcal{F})$) come:

$$R_m(t_1, t_2) = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} \quad (6.5)$$

Per come è definita l'affidabilità può essere collegata alla distribuzione dei tempi al guasto:

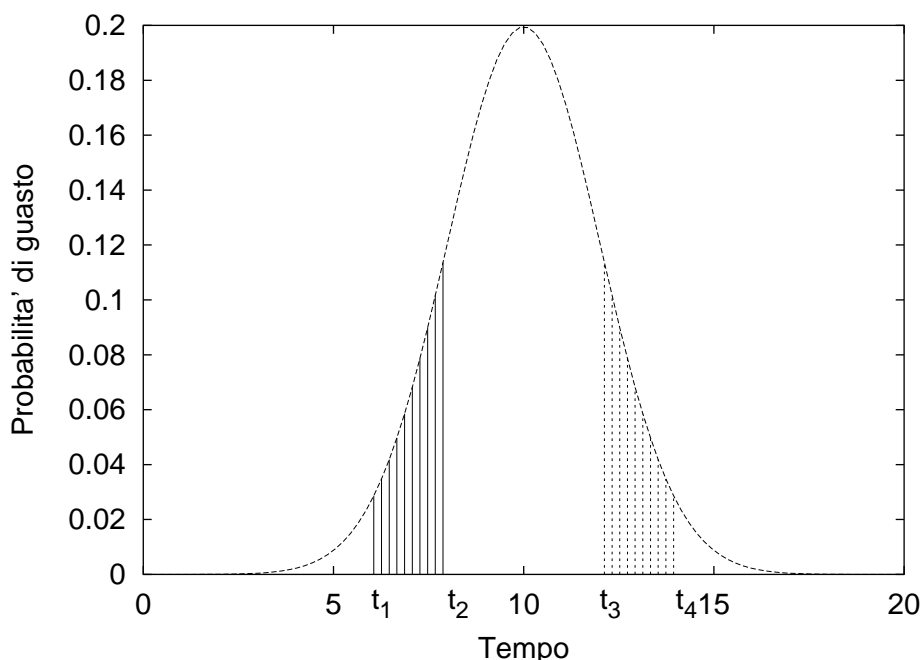


Figura 6.2: Affidabilità di missione

$$R(t) = \Pr(\mathbf{t} > t) = 1 - \Pr(\mathbf{t} \leq t) = 1 - F(t) \quad (6.6)$$

o, utilizzando la densità dei tempi al guasto:

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(s) ds \quad (6.7)$$

E' importante osservare che un dispositivo complesso può avere modalità di guasto diverse con diversi effetti sulla funzionalità del sistema in cui è inserito. Quando si intenda differenziare queste modalità di guasto è necessario specificare l'affidabilità per ogni tipo di guasto, separatamente. Inoltre l'affidabilità di un dispositivo è legata alle condizioni operative del dispositivo stesso. Ad esempio, la probabilità che un sistema isolante si guasti nei prossimi 10 anni è tanto più alta tanto più alto è il campo a cui l'isolamento è soggetto in condizioni normali. Per calcolare l'affidabilità di un dispositivo in funzione delle differenti condizioni di lavoro bisognerebbe valutare:

$$R(t \mid stress = S) \quad (6.8)$$

Tale studio deve essere condotto per mezzo di prove accelerate ed elaborando opportuni modelli (ad esempio, modelli di vita).

6.2.1 Funzioni affidabilistiche empiriche

Si considerino n_0 dispositivi messi in prova, ad esempio 1000 lampadine energizzate al tempo $t = 0$. Sia $n_g(t)$ il numero di lampadine che si sono guastate dopo t ore dall'energizzazione del campione. Si può provare allora che la funzioni affidabilistiche definite in precedenza possono essere stimate come:

$$\hat{F}(t) = \frac{n_g(t)}{n_0}$$

frazione di lampade che si sono guastate t ore.

$$\hat{R}(t) = \frac{n_0 - n_g(t)}{n_0}$$

frazione di lampade ancora funzionanti dopo t ore.

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\Delta t} \frac{n_g(t + \Delta t) - n_g(t)}{n_0}$$

frazione di lampade che si sono guastate nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$, diviso per Δt . Al tendere di n_0 all'infinito, le funzioni affidabilistiche empiriche tendono, per la legge dei grandi numeri, alle funzioni affidabilistiche teoriche, mostrate nei precedenti paragrafi.

6.2.2 Il tasso di guasto istantaneo

Il tasso di guasto istantaneo é quella quantità nota altrimenti come tasso di azzardo, definita come:

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Pr(t < \mathbf{t} \leq t + h \mid \mathbf{t} > t) \quad (6.9)$$

Il tasso di azzardo é quindi definita come la probabilità dell'evento $\mathcal{E} = \{t < \mathbf{t} \leq t + h\}$ condizionata dall'evento $\mathcal{F} = \{\mathbf{t} > t\}$. Applicando la definizione di probabilità condizionata, si scrive:

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{F(t + h) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (6.10)$$

Utilizzando gli stimatori empirici descritti in precedenza si ottiene lo stimatore empirico del tasso di guasto istantaneo:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{1}{h} \frac{n_s(t) - n_s(t + h)}{n_s(t)} \quad (6.11)$$

Quindi il tasso di guasto é assimilabile al rapporto fra i dispositivi che si guastano in un certo intervallo e quelli che sono arrivati vivi all'inizio di questo intervallo. Dividendo numeratore e denominatore per n_0 si ottiene:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{R}(t)} \quad (6.12)$$

Nella pratica il tasso di guasto empirico segue quasi sempre la cosiddetta curva a “vasca da bagno”, come mostrato qualitativamente in 6.3. La curva presenta tre distinti tratti. Il primo tratto, ad azzardo calante, é quello relativo ai guasti giovanili, guasti originati da difetti di produzione e che si manifestano nel primo periodo di funzionamento. L'azzardo cala in quanto, al crescere del tempo, i dispositivi che presentano guasti legati ad una produzione difettosa vengono scoperti ed eliminati. Il secondo tratto, detto “vita utile”, é a tassi di azzardo costanti. E' noto che la probabilità di avere un guasto in $[t, t + dt]$ é uguale a $\lambda(t)dt$: nel periodo di vita utile o dei guasti casuali, la probabilità di guasto non dipende dal tempo ovvero l'effetto dell'invecchiamento può essere trascurato. L'ultimo tratto, ad azzardo costante, corrisponde alla fine della vita utile ed all'inizio della zona dei guasti per invecchiamento o usura.

Sistemi con azzardi crescenti, calanti o costanti possono essere modellati utilizzando la distribuzione di Weibull, infatti:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} = \frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} = \lambda_0 t^{\beta-1}$$

si osserva che:

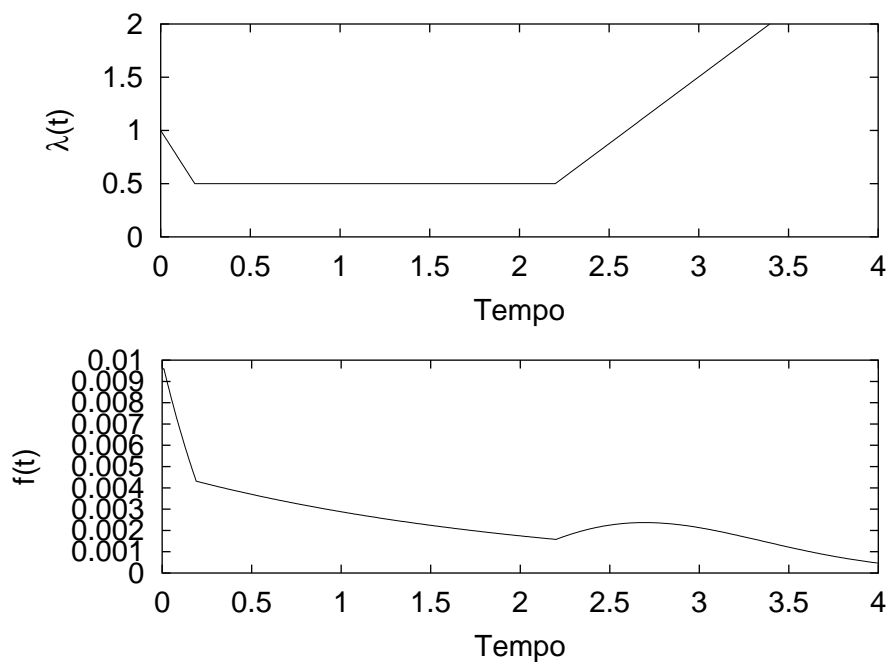


Figura 6.3: La curva a “vasca da bagno” dell’azzardo e la corrispondente densità di probabilità dei guasti.

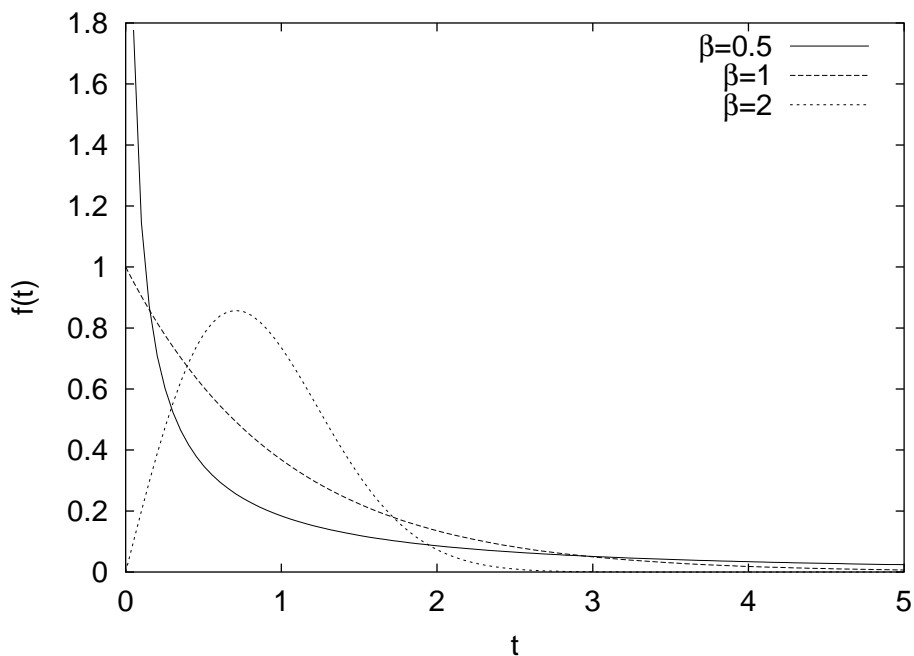


Figura 6.4: Andamento della funzione di probabilità di weibull per $\alpha = 1$ e per diversi valori di β .

$$t^{\beta-1} = \begin{cases} \beta > 1 & \text{azzardo crescente} \\ \beta = 1 & \text{azzardo costante} \\ \beta < 1 & \text{azzardo calante} \end{cases}$$

la distribuzione di Weibull é in grado di approssimare una larga classe di fenomeni a tassi di guasto istantaneo crescente, costante o calante. Si noti dalla figura 6.4 come le varie forme possibili della distribuzione di Weibull siano assimilabili ai tratti della tensità di guasto riportata in 6.3.

E' importante osservare che mediante il tasso di azzardo é possibile specificare completamente le funzioni affidabilistiche. Infatti, é :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Quindi:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

porge:

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = -\lambda(t)dt$$

che integrata fornisce la relazione cercata:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) \quad (6.13)$$

ed anche

$$f(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) \quad (6.14)$$

Infine, si osservi che l'affidabilità di missione in $[t, t+h]$ ecc:

$$R_m(t, t+h) = \frac{R(t+h)}{R(t)} = \frac{\exp\left(-\int_0^{t+h} \lambda(s)ds\right)}{\exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)} \approx \exp(-\lambda(t)h)$$

cioé l'affidabilità di missione puó essere legata al tasso di guasto istantaneo. Nel periodo dei guasti casuali, per un prefissato valore di h , l'affidabilità di missione non dipende dal momento di inizio della missione.

6.2.3 Parametri affidabilistici

Per i sistemi non riparabili, o ad un singolo componente, si definisce un solo parametro affidabilistico, cioè il tempo medio fino al guasto o MTTF (Mean Time To Failure o Mean Operating Time to Failure):

$$MTTF = \mathbf{E}[t] \quad (6.15)$$

Al solito, si puó definire lo stimatore empirico sulla base di una prova effettuata su n_0 dispositivi i cui tempi t_i di rottura siano stati registrati:

$$\widehat{MTTF} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} t_i \quad (6.16)$$

Se la prova viene interrotta dopo $r < n_0$ cedimenti, una stima conservativa di MTTF é data da:

$$M\hat{T}TF = \frac{1}{n_0}((n_0 - r)t_r + \sum_{i=1}^r t_i) \quad (6.17)$$

In questo modo, agli $n - r$ dispositivi ancora sani in t_p viene assegnato un tempo di guasto pari a t_p , ottenendo una stima di MTTF sicuramente inferiore a quella che si sarebbe ottenuta conducendo la prova fino all'esaurimento di tutti i dispositivi. La quantità

$$T_C = (n_0 - r)t_r + \sum_{i=1}^r t_i$$

é il tempo cumulato di guasto.

Il calcolo di MTTF può essere fatto a partire dalla funzione di affidabilità . Infatti:

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt = - \int_0^{\infty} t \frac{dR(t)}{dt} dt = [tR(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Il primo termine é uguale a 0. Infatti per $t = 0$ il prodotto $tR(t)$ é certamente nullo essendo $R(t)$ compreso in $[0, 1]$ (R é una probabilità). Per t tendente all'infinito, se λ_{inf} é un minorante per $\lambda(t)$, allora é :

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right) \leq \exp(-\lambda_{inf} t)$$

ed $R(t)$ può essere maggiorata da una funzione esponenziale. Poiché gli esponenziali tendono a zero più velocemente delle potenze del tempo, allora $\lim_{t \rightarrow \infty} tR(t) = 0$. Dunque:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (6.18)$$

Si ricorda che nell'ipotesi di azzardo costante $R(t) = \exp(-\lambda t)$, quindi:

$$MTTF = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda s) ds = \frac{1}{\lambda} \quad (6.19)$$

Questa relazione permette di ottenere uno stimatore, approssimato per difetto, del tasso di guasto:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{M\hat{T}TF} = \frac{n_0}{T_C} \quad (6.20)$$

6.3 Tasso di guasto per componenti elettronici

Quando si discute di tasso di guasto di un componente ci si riferisce sempre ad un numero costante di guasti per anno. E' tuttavia noto che il tasso di guasto di un componente segue, generalmente, la curva "a vasca da bagno". Perché allora non si considerano i tratti a tasso di guasto calante (mortalità infantile) e crescente (invecchiamento)? Perché si ammette che opportune mediante opportuni trattamenti gran parte dei guasti infantili siano stati rimossi. Inoltre, si ipotizza che la manutenzione del sistema in cui il componente é inserito sia tale da garantire che, non appena il componente stesso inizia a deteriorarsi per effetto dell'invecchiamento, si proceda alla sostituzione.

Fra le tecniche che permettono di eliminare i guasti infantili si possono menzionare il controllo di qualità effettuato sulle saldature (che spesso sono il punto debole dei componenti elettronici) e l'utilizzo del componente per un numero di ore prefissato nelle condizioni nominali o, addirittura, in condizioni più gravose delle nominali. Questa procedura é simile a quella fatta per le Ferrari, che vengono consegnate al cliente dopo aver percorso circa 250 chilometri.

Per determinare il tasso di guasto per un componente si possono scegliere strade alternative. La prima prevede di effettuare test di durata in laboratorio, riproducendo il piú fedelmente possibile le condizioni di utilizzo oppure, caso piú comune, condizioni piú gravose. La seconda strada possibile é raccogliere informazioni su quello che é stato il comportamento del componente durante l'utilizzo pratico.

Entrambe le strade presentano problemi notevoli. Se si intende effettuare prove in laboratorio alle condizioni nominali si deve tenere conto che tali prove potrebbero avere durata notevole. Le prove accelerate non presentano problemi di questo tipo, ma la é necessario estrapolare il tasso di guasto alle condizioni nominali di lavoro. Ciò può deve essere fatto con grandissima attenzione.

Per quanto concerne i ritorni "dal campo", bisogna osservare che sono decisamente piú economici (non é necessario dotarsi di un laboratorio). Bisogna anche osservare che non sempre il componente é stato utilizzato dall'utente finale nel modo corretto e, pertanto, il tasso di rottura può assumere valori significativamente diversi da quelli ottenibili in condizioni nominali. Questo aspetto può essere considerato un vantaggio, in quanto si introduce nel computo del tasso di guasto anche il fattore umano. In generale, tuttavia, i ritorni dal campo, se il sistema é stato progettato correttamente ed i guasti giovanili sono stati eliminati, possono essere pochi e, pertanto, la stima statistica può essere affetta da una forte incertezza.

Un modo per risolvere questi problemi é quello di utilizzare manuali di affidabilità. Fea i piú noti sono il manuale MIL-HDBK-217, il manuale coprodotto da CNET, British Telecom, ed Italtel, e, quando disponibili, i dati forniti dai costruttori stessi (esempio, Motorola). Per calcolare il tasso di guasto, λ_p (*part failure rate*), i manuali si servono di formule del tipo:

$$\lambda_p = \lambda_b \pi_1 \pi_2 \dots \quad (6.21)$$

dove λ_b (*base failure rate*) é la frequenza di guasto intrinseca, e dipende dal tipo di dispositivo, dalla temperatura ambiente Θ_A e dal fattore di stress, S , definito come:

$$S = \frac{\text{carico effettivo}}{\text{carico nominale a } 25 \text{ }^\circ\text{C}} \quad (6.22)$$

Il fattore λ_b cresce, generalmente, in modo esponenziale con la temperatura ambiente.

I fattori π tengono conto di condizioni ambientali (π_E), di qualità nel progetto e nella realizzazione (π_Q), tecnologia (π_A), temperatura della giunzione (π_T), ecc.. Ad esempio, per componenti passivi é:

$$\lambda_p = \lambda_b \pi_E \pi_Q \pi_A \quad (6.23)$$

Il fattore π_T segue la legge di Arrhenius:

$$\frac{\pi_{\Theta_2}}{\pi_{\Theta_1}} \approx \exp \left[\frac{E_A}{k} \left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_2} \right) \right] \quad (6.24)$$

dove k é la costante di Boltzmann, E_A , paria 0.3-0.7 eV per semiconduttori in silicio, é una energia di attivazione globale, approssimativamente pari a quella del meccanismo di rottura dominante.

Esempio 6.3.1 (Tasso di guasto diodi) Il calcolo del tasso di guasto viene effettuato mediante la seguente equazione:

$$\lambda_p = \lambda_b \pi_T \pi_S \pi_C \pi_Q \pi_E \text{ guasti}/10^6 \text{ ore}$$

dove i fattori π sono:

π_T temperatura

π_S stress

π_C costruzione dei contatti

π_Q qualità

π_E ambientale

La frequenza di guasto intrinseca, λ_b , dipende dal tipo di dispositivo e dalla applicazione (analogico per applicazioni generiche, per rettificatori, Schottky, ecc.).

Tipo	λ_b
Analogico, general purpose	0.0038
Switching	0.0010
Rettificatore, fast recovery	0.0690
Rettificatore, Schottky	0.0030
Diodo di potenza	0.0050
Rettificatore di alta tensione	0.0050
Varistore (soppressori transistori)	0.0013
Regolatore di corrente	0.0034
regolatori di tensione, Zener	0.0020

Il fattore π_T é funzione della temperatura della giunzione espressa in gradi centigradi, Θ_J , attraverso le equazioni:

$$\pi_T = \exp \left[- 3091 \left(\frac{1}{\Theta_J + 273} - \frac{1}{298} \right) \right]$$

valida per diodi analogici general purpose, switching fast recovery, per rettificatori varistori.

$$\pi_T = \exp \left[- 1925 \left(\frac{1}{\Theta_J + 273} - \frac{1}{298} \right) \right]$$

valida per regolatori di tensione, regolatori di corrente e Zener.

Il fattore di stress, π_S , dipende dal tipo di applicazione. Per varistori (soppressori di transistori), regolatori di tensione (diodi a valanga), riferimenti di tensione (diodi Zener), e regolatori di corrente é:

$$\pi_S = 1.0$$

per tutti gli altri, definito V_s lo stress di tensione come il rapporto fra la tensione applicata e quella nominale:

$$V_s = \frac{\text{tensione inversa sul diodo}}{\text{tensione nominale}}$$

é:

$$\pi_S = \begin{cases} 0.054 & \text{se } V_s \leq 3 \\ V_s^{2.43} & \text{se } 0.3 < V_s \leq 1.0 \end{cases}$$

Il fattore di costruzione dei contatti é:

Tecnologia costruttiva	π_C
Metallurgici	1.0
Non metallurgici	2.0

Sistemi complessi

6.4 Generalità, concetto di missione

Quando si intende sviluppare un dispositivo o sistema è spesso necessario calcolare l'affidabilità del prodotto progettato senza aspettare i risultati di test accelerati o i dati relativi al comportamento "sul campo" del prodotto. Ciò accade, ad esempio, per gli aerei utilizzati nel trasporto civile oppure nello sviluppo di sistemi per le missioni spaziali.

In ogni caso, poiché la difettosità di un prodotto si traduce sempre in un costo per il produttore, anche quando ci sia la possibilità di valutare *a posteriori* l'affidabilità del prodotto sviluppato, è sempre meglio valutare *a priori* (predizione), il comportamento affidabilistico del prodotto durante la fase di sviluppo.

La predizione dell'affidabilità del prodotto deve essere condotta valutando in modo esaustivo le funzioni a cui il prodotto deve rispondere. Ognuna di queste funzioni sarà indicata, nel seguito, con il termine di missione. Stabilita la o le missioni che devono essere portate a termine dal prodotto, si procede, missione per missione, a valutare in quale modo i guasti sui singoli dispositivi che compongono il prodotto si riflettano sulla capacità del prodotto di portare a termine la missione considerata. Per fare ciò è, tra l'altro, necessario considerare che i singoli dispositivi possono avere uno o più modi di guasto e, pertanto, possono avere diverse influenze sulla capacità di adempiere al compito prefissato.

L'analisi affidabilistica compiuta secondo i criteri indicati sopra (in modo molto impreciso e generico) porta il progettista ad evitare errori macroscopici e a scegliere fra diverse strategie per realizzare il prodotto (ad esempio, scelta fra diverse configurazioni circuitali fra componenti più o meno idonei per ottenere il livello di affidabilità prestabilito, ecc.). Anche l'opzione di introdurre dispositivi atti a ridurre lo stress sui componenti può essere valutata; ad esempio, nella realizzazione di una sala dedicata ad ospitare una banca dati, è utile valutare se l'introduzione di un sistema di condizionamento dell'ambiente possa portare ad una sostanziale riduzione del numero di guasti per anno del *mainframe* ospitante la banca dati stessa.

Durante la fase di progetto si vengono così a definire diversi scenari. I progetti maggiormente affidabili avranno, in generale, un costo maggiore (presenza di ridondanze, componenti di maggior qualità, introduzione di apparecchiature atte a ridurre lo stress termico sui componenti, ecc.). La scelta finale fra le varie configurazioni possibili deve essere fatta valutando (cosa non sempre facile) il costo totale del progetto, cioè la somma del costo del prodotto e del costo legato alla difettosità del prodotto. Si noti che i costi legati alla difettosità del prodotto possono essere significativamente alti in presenza di problemi di sicurezza per l'utente finale del prodotto. È pertanto importante inserire, fra le missioni del prodotto, quella di non arrecare danno all'utente del prodotto stesso.

6.5 Il diagramma affidabilistico

Influenza della missione

I diagrammi affidabilistici consentono di organizzare in modo razionale l'analisi affidabilistica del sistema. In generale, esistono tanti diagrammi affidabilistici quante sono le missioni che devono essere compiute dal sistema. Infatti, il singolo diagramma affidabilistico deve rispondere alle seguenti domande:

- Quali dispositivi sono necessari per compiere la missione?
- Quali dispositivi possono rompersi senza alterare la capacità del sistema di compiere la missione?

Nel tracciare il diagramma affidabilistico, ogni dispositivo viene rappresentato come un blocco funzionale connesso ad almeno un altro blocco funzionale. Il diagramma ha una entrata ed una uscita. Il sistema funziona quando esiste almeno un percorso di blocchi funzionali attivi (o dispositivi non guasti) fra ingresso ed uscita.

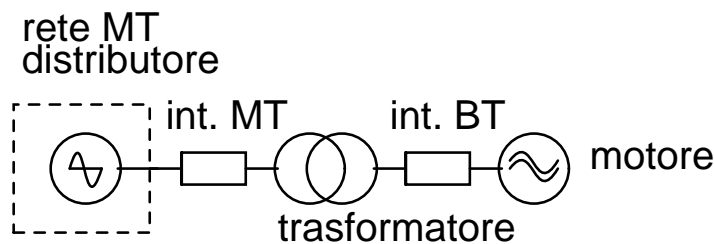


Figura 6.5: Diagramma unifilare di un sistema elettrico industriale progettato per alimentare un motore elettrico in bassa tensione

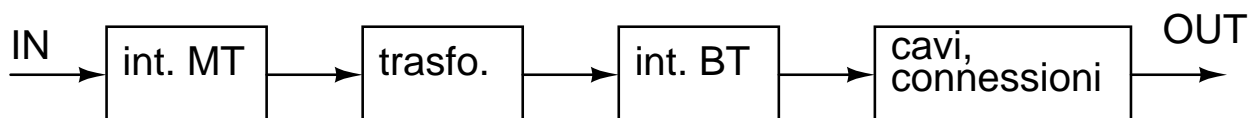


Figura 6.6: Diagramma affidabilistico di un sistema elettrico industriale progettato per alimentare un motore elettrico in bassa tensione. La missione è quella primaria, cioè l'alimentazione del motore.

Per tracciare il diagramma affidabilistico si procede nel modo seguente: tutti i dispositivi strettamente necessari per compiere la missione vengono posti in serie. Quando due o più dispositivi possano compiere la medesima funzione, tali dispositivi vengono posti in parallelo (ridondanza). Dispositivi che non abbiano influenza sulla capacità del sistema di compiere la missione specificata non vengono rappresentati.

Esempio 6.5.1 Per fare un esempio pratico, si consideri il sistema elettrico di figura 6.5.

Per tale sistema, fra le varie possibili, possono essere considerate due missioni: (a) portare l'energia elettrica al motore (missione primaria), (b) impedire che, in caso di corto circuito del motore, debbano intervenire le protezioni ed i dispositivi di manovra della rete in media tensione che alimenta il sistema (missione secondaria).

Per potere espletare la missione primaria sono necessari tutti i dispositivi mostrati nel circuito unifilare. Pertanto, il diagramma affidabilistico è la serie dei blocchi funzionali relativi ad ogni dispositivo.

La missione secondaria è invece espletata dai due interruttori. Poiché una opportuna regolazione dei tempi di intervento permette a questi due dispositivi di interrompere il circuito prima delle protezioni della rete MT, tali dispositivi possono essere pensati come un circuito affidabilistico di tipo parallelo.

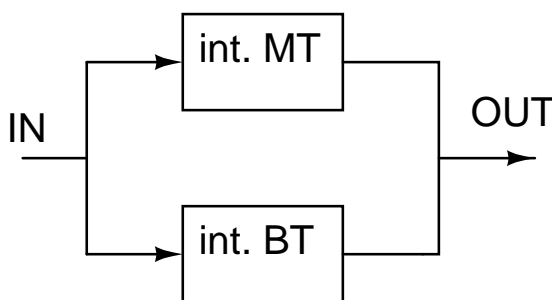


Figura 6.7: Diagramma affidabilistico di un sistema elettrico industriale progettato per alimentare un motore elettrico in bassa tensione. La missione è quella secondaria, cioè impedire che un corto circuito del motore provochi l'intervento delle protezioni della rete in media tensione.

Si noti, dal diagramma relativo alla missione secondaria, che l'essere elettricamente in serie non implica la serie affidabilistica.

6.6 Strutture semplici

6.6.1 Sistemi di tipo serie

Il sistema piú semplice é quello in cui ogni dispositivo é necessario per potere compiere la missione. Poiché la probabilità di tenuta del sistema ($\Pr(S)$) é data dalla probabilità di tenuta simultanea di tutti i dispositivi:

$$\Pr(S) = \Pr(D_1 D_2 \dots D_n)$$

facendo l'ipotesi di indipendenza stocastica fra i guasti, l'affidabilità del sistema é data da:

$$R = \prod_{i=1}^n R_i < \min_i(R_i) \quad (6.25)$$

che, in termini di tassi di guasto si traduce in:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (6.26)$$

Quindi,

$$MTTF = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (6.27)$$

Chiaramente, un sistema serie presenta alti tassi di guasto e non é, in generale, adatto a conseguire livelli di affidabilità elevati. Per conseguire un incremento di affidabilità nei dispositivi in serie é possibile scegliere dispositivi di elevata qualità e, se possibile, ridurre lo stress sui singoli componenti (ad esempio mediante raffreddamento forzato).

6.6.2 Sistemi di tipo parallelo (ridondanza)

I sistemi di tipo parallelo, o a ridondanza totale, sono quelli in cui una certa funzione, necessaria per compiere la missione, può essere espletata da due o piú dispositivi. Poiché la probabilità di guasto del sistema ($\Pr(\bar{S})$) é data dalla probabilità di guasto simultanea di tutti i dispositivi:

$$\Pr(\bar{S}) = \Pr(\bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \text{bar} D_n)$$

facendo l'ipotesi di indipendenza stocastica fra i guasti, l'inaffidabilità del sistema é data da:

$$1 - R = \prod_{i=1}^n (1 - R_i) < \min_i(1 - R_i) \quad (6.28)$$

Quando le affidabilità dei dispositivi componenti il parallelo non sono uguali, l'affidabilità del dispositivo é difficilmente esprimibile in forma compatta, eccezion fatta per il caso di due dispositivi:

$$R = R_1 + R_2 - R_1 R_2 \quad (6.29)$$

Se tutti i dispositivi sono identici $R_i = R_D$, allora é possibile scrivere:

$$R = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} R_D (1 - R_D)^{n-i} \quad (6.30)$$

E' necessario osservare che la ridondanza puó essere effettuata in modi diversi. Ogni modo di effettuare la ridondanza ha influenza sul tasso di guasto dei componenti che costituiscono il parallelo. In particolare, per dispositivi che debbano trasmettere potenza o corrente (si pensi a gruppi sincroni), si puó avere:

- ridondanza calda, i dispositivi sono soggetti allo stesso carico. Il tasso di guasto é identico per i vari dispositivi.
- ridondanza tiepida, i dispositivi ridondanti sono soggetti a carico ridotto e, pertanto, hanno tassi di guasto piú bassi di quello che fornisce il servizio.
- ridondanza fredda, gli elementi ridondanti sono scarichi ed hanno tasso di guasto nullo finché non vengono posti in servizio.

Per ottenere un incremento delle prestazioni di sistemi ridondanti é possibile utilizzare dispositivi costruiti utilizzando diverse tecnologie oppure diversi costruttori. Ciò porta ad una riduzione di guasti legati ad una sbagliata progettazione del componente o ad una inadeguata prestazione di una particolare tecnologia costruttiva in determinate condizioni di impiego.

Sistemi a ridondanza parziale

A volte, su n dispositivi, debbono essere operativi almeno $k < n$ perché il sistema sia in grado di compiere la propria missione. Tali si dicono a ridondanza parziale.

6.6.3 Combinazione di strutture tipo serie e parallelo

Per strutture riconducibili ad una serie di sottoblocchi tipo serie/parallelo si agisce conglobando in elementi equivalenti i singoli sottoblocchi, come mostrato in figura 6.8

6.6.4 Influenza del modo di guasto dei dispositivi

Ogni dispositivo puó avere differenti modi di guasto. Per un dispositivo elettrico i due modi di guasto piú significativi sono quelli di corto circuito (CC) e di circuito aperto (CA). In generale, a seconda della missione prescelta, sará CC oppure CA il modo di guasto che porta il sistema a non essere capace di compiere la missione fissata. A volte, quando il dispositivo ha piú modi di guasto, é necessario specificare a quale modo di guasto ci si riferisce. Nell'esempio 6.5.1, per la missione primaria i modi di guasto degli interruttori sono tutti quei modi che rendono un interruttore incapace di trasmettere corrente, cioè:

- incapace di chiudere,
- apertura non richiesta,
- guasto durante il servizio,
- guasto prodottosi o scoperto durante test o manutenzione

Al contrario, per la missione secondaria, i modi di guasto sono quei modi che rendono un interruttore incapace di interrompere una corrente, cioè:

- incapace di aprire

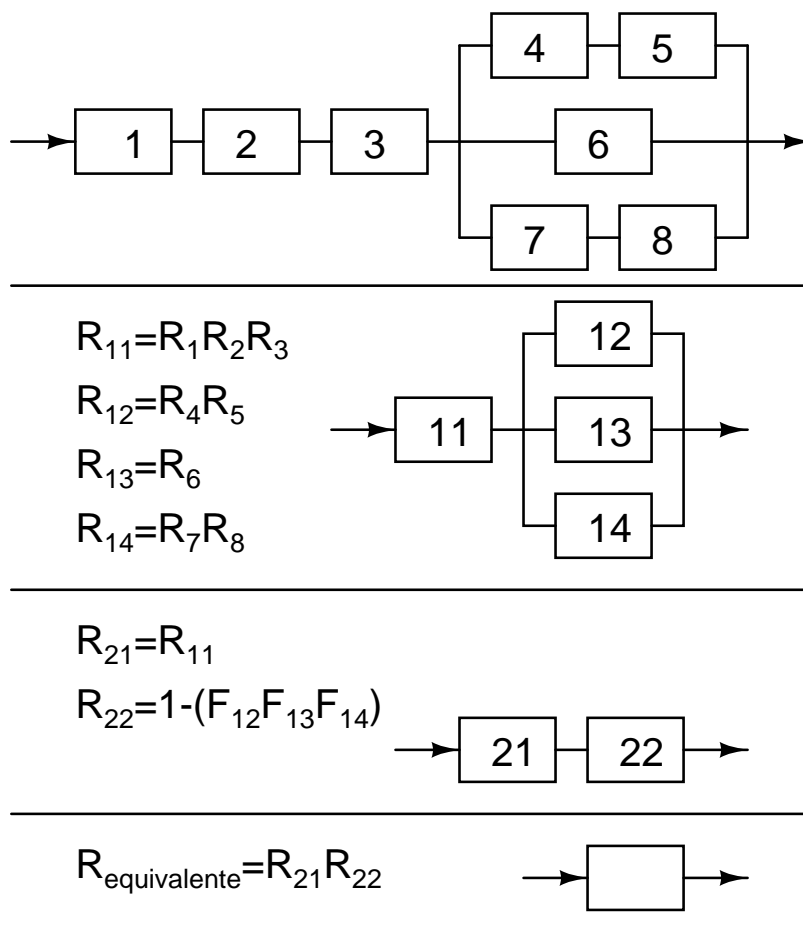


Figura 6.8: Procedura di semplificazione di un sistema costituito da sottoblocchi aventi struttura del tipo serie e/o parallelo.

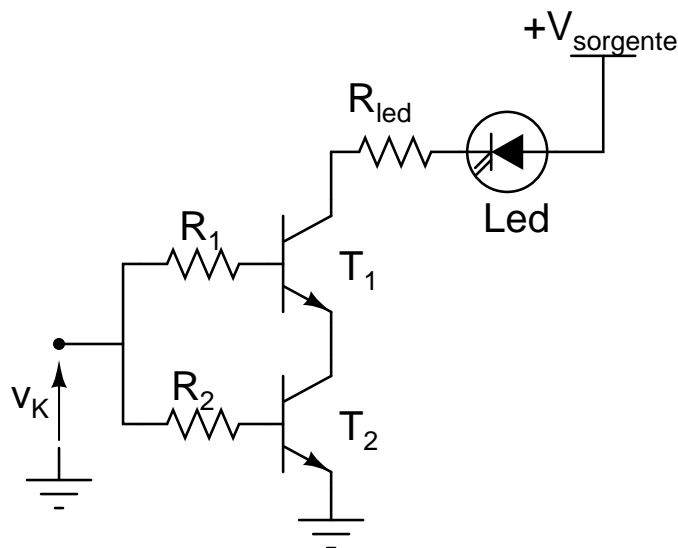


Figura 6.9: Circuito elettronico di segnalazione di stato. Quando v_k è "alta", il led si illumina

- rottura durante una fase di apertura

Il modo di guasto influenza anche, indipendentemente dalla missione, la configurazione affidabilistica. Ad esempio, nel circuito elettronico di figura 6.9, i due transistor possono essere considerati in parallelo se il modo di guasto è CC. In serie se il modo di guasto è CA. Nel caso specifico, poiché il modo di guasto più frequente è CA, i due dispositivi sono in parallelo. Quando i due modi di guasto possono entrambi portare all'interruzione del servizio fornito, è possibile considerare un dispositivo come due blocchi funzionali in serie. Ogni blocco è relativo ad un tipo di guasto, CC o CA.

Esempio 6.6.1 (Diodi in serie o parallelo) I diodi possono dare luogo, in seguito a guasto, a circuiti aperti o corto circuiti. Siano R_{CA} e R_{CC} le affidabilità calcolate per i due modi di guasto. Tali affidabilità possono essere stimate nel modo seguente. Se, a partire da n_0 diodi, dopo un tempo t n_{CA} si sono interrotti e n_{CC} sono andati in corto circuito, allora le affidabilità stimate sono:

$$\hat{R}_{CA}(t) = \frac{n_{CA}}{n_0}$$

$$\hat{R}_{CC}(t) = \frac{n_{CC}}{n_0}$$

La serie di due diodi (equivalente, come funzione, ad un unico diodo) smette di funzionare se uno dei due diodi si guasta dando luogo ad un circuito aperto o, alternativamente, se entrambi i diodi sono in corto circuito. Il diagramma affidabilistico può essere tracciato come due blocchi in serie relativi alla rottura a circuito aperto e due blocchi in parallelo relativi alla rottura in corto circuito. Quindi:

$$R_{CA-CA} = R_{CA}^2$$

$$R_{CC-CC} = 2R_{CC} - R_{CC}^2$$

$$R \approx R_{CA}^2(2R_{CC} - R_{CC}^2)$$

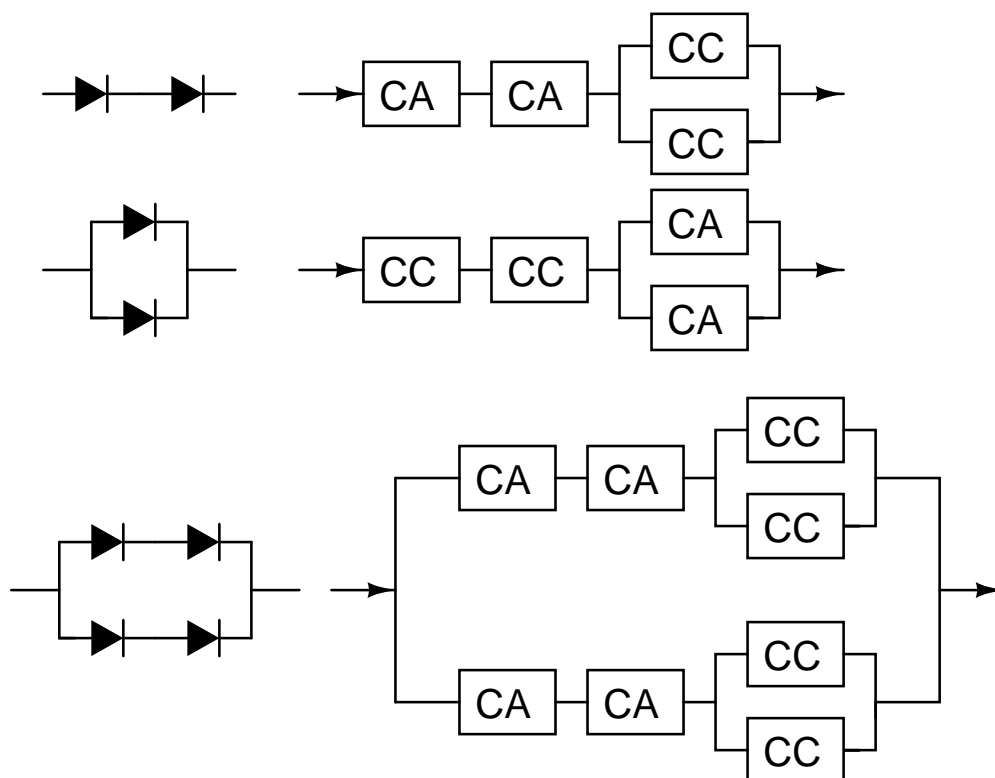


Figura 6.10: Configurazioni circuitali dei diodi e corrispondenti diagrammi affidabilistici

Il risultato è approssimato in quanto il diagramma mostrato ammette guasti simultanei, di uno e dell'altro tipo, per il medesimo diodo. Perché il risultato sia prossimo a quello reale le probabilità di guasto devono essere sufficientemente basse da potere considerare approssimativamente nulla la probabilità di due guasti simultanei sullo stesso dispositivo. Tale approssimazione è ragionevole in pratica.

Per i diodi in parallelo valgono considerazioni analoghe, come mostra la figura 6.10. Pertanto:

$$R \approx R_{CC}^2(2R_{CA} - R_{CA}^2)$$

La figura 6.10 mostra anche una configurazione a ridondanza quadratica. Tale struttura è detta *fault tolerant* in quanto sopporta almeno un guasto di un tipo o dell'altro.

6.7 Strutture complesse

Si consideri la figura 6.11. Tale struttura non è direttamente riconducibile a combinazione di sottosistemi di tipo serie o parallelo. Come si procede per il calcolo dell'affidabilità o del tasso di guasto di una struttura di questo tipo? Esistono vari metodi. I più importanti, descritti in questa sezione, sono quello della probabilità totale e quello dello spazio degli stati.

6.7.1 Il metodo della probabilità totale

Il metodo della probabilità totale consiste nello scegliere un dispositivo nel sistema. Tale dispositivo sia caratterizzato da una affidabilità R^* . Si supponga di essere in grado di calcolare $R(F)$, l'affidabilità del sistema supponendo che il dispositivo sia perfettamente funzionante, $R(G)$, l'affidabilità del sistema

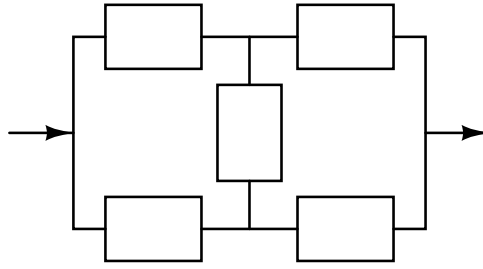


Figura 6.11: Sistema affidabilistico con struttura non riconducibile a combinazione di sottosistemi di tipo serie o parallelo.

supponendo che il dispositivo sia guasto. Utilizzando il teorema della probabilità totale (si veda (2.14)) si ottiene:

$$R = R(F)R^*R(G)(1 - R^*) \quad (6.31)$$

Applicando il metodo della probabilità totale si ottengono due sottosistemi: il sottosistema in cui il dispositivo scelto è funzionante e quello in cui è guasto. Se tali sottosistemi non fossero direttamente risolvibili, è possibile applicare il metodo della probabilità totale in modo iterativo. Per il sistema con struttura a ponte, ipotizzando che ogni componente abbia affidabilità R , il sistema ha affidabilità data da:

$$R_S = (2R^2 - R^4)(1 - R) + ((2R - R^2)^2)R = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5$$

6.7.2 Il metodo dello spazio degli stati

Il metodo degli stati, applicato ad un sistema di N dispositivi consiste nel numerare i dispositivi progressivamente (con numeri interi che vanno da 1 ad N). E' quindi consigliabile scrivere una matrice consistente di N righe e 2^N colonne. Tale matrice può essere riempita a partire dall'ultima riga mediante sequenze di 1 e 0 consecutivi. Il numero di 0 (o di 1) consecutivi è pari a $2^{(N-r)}$ se r è il numero di riga. Per fare un esempio, una matrice relativa ad un sistema di 3 dispositivi è:

1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0

Ogni colonna della matrice specifica un particolare stato del sistema. I numeri indicano lo stato (0=guasto, 1=funzionante) del dispositivo avente il numero corrispondente al numero di riga. Ad esempio, la terza colonna della matrice relativa ad un sistema di tre elementi è: $(1, 0, 1)^T$. Ciò significa che, nel terzo stato degli otto possibili, il primo ed il terzo dispositivo non sono guasti, mentre il secondo dispositivo non è in grado di espletare la propria funzione.

La matrice che descrive gli stati del sistema può essere generata in modo indipendente dal sistema. A partire dalla matrice è poi necessario valutare, colonna per colonna, quali stati consentono al sistema di portare a termine la missione e quali no. L'affidabilità del sistema è pari alla somma delle probabilità degli stati che permettono di compiere la missione.

Ad esempio, per il sistema a ponte, ipotizzato che ogni componente abbia la medesima affidabilità, si osserva che esistono 2 stati in cui 2 dispositivi consentono di compiere la missione, 8 stati con 3 dispositivi, 5 stati con 4 dispositivi ed 1 stato con 5 dispositivi. L'affidabilità è data da:

$$R_S = 2(R^2(1 - R)^3) + 8(R^3(1 - R)^2) + 5(R^4(1 - R)) + R^5 = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5$$

Il metodo dello spazio degli stati si presta bene all'implementazione mediante calcolatore elettronico. Per effettuare i conti in modo manuale é forse preferibile il metodo della probabilità totale.